अध्याय 7

परिमेय संख्याएँ

7.1 गिनने में प्रयोग ली गई संख्याओं को प्राकृत संख्या कहते है जैसे 1,2,3, ... यदि प्राकृत संख्याओं में शून्य (0) सम्मिलित कर दिया जाए तो पूर्ण संख्याएँ प्राप्त होती है। अतः 0,1,2,3, ... को पूर्ण संख्याएँ कहते है। इसी प्रकार पूर्ण संख्याओं में प्राकृत के ऋणात्मक को सम्मिलित करने पर हमे पूर्णांक प्राप्त होते हैं।

..... 4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4 .....

ये सभी **पूर्णांक** कहलाते हैं।

7.2 **परिमेय संख्याएँ** ऐसी संख्याएँ जिन्हें $\frac{p}{q}$ के रूप में परिभाषित किया जा सकता है जहाँ p, q पूर्णांक है तथा $q \neq 0$ है। जैसे $\frac{2}{1}$, $\frac{-3}{7}$, $\frac{7}{-3}$, $\frac{-2}{-3}$, इत्यादि।

यहाँ प्रत्येक भिन्न संख्या परिमेय संख्याएँ होती है लेकिन प्रत्येक परिमेय संख्या भिन्न नहीं होती है। ऐसी परिमेय संख्या जिसके अंश व हर दोनों धनात्मक है तो धनात्मक परिमेय संख्या एवं ऐसी परिमेय संख्या जिसके अंश व हर दोनों ऋणात्मक है तो धनात्मक परिमेय संख्या एवं ऐसी परिमेय संख्या जिसमें अंश अथवा हर कोई एक ऋणात्मक पूर्णांक है, ऐसी परिमेय संख्या ऋणात्मक परिमेय संख्या कहलाती है।

महत्वपूर्ण तथ्य

(i) सभी पूर्णांक परिमेय संख्या होती है जैसे $\frac{-3}{1}$, $\frac{0}{1}$ इत्यादि।

(ii) शून्य एक परिमेय संख्या है।

(iii) शून्य न तो धनात्मक परिमेय संख्या है न ही ऋणात्मक परिमेय संख्या है।

(iv) परिमेय संख्याओं में पूर्णांक और भिन्न सम्मिलित है।

7.3 **समतुल्य परिमेय संख्याएँ** – ऐसी परिमेय संख्याएँ जो परस्पर बराबर हो एक दूसरे के समतुल्य कही जाती है किसी परिमेय संख्या के अंश और हर को समान संख्या से गुणा अथवा भाग करके इन्हे इच्छित अंश अथवा हर में बदल सकते हैं। जैसे –

$$\frac{-5}{7} = \frac{-10}{14} = \frac{-15}{21} = \frac{10}{-14}$$

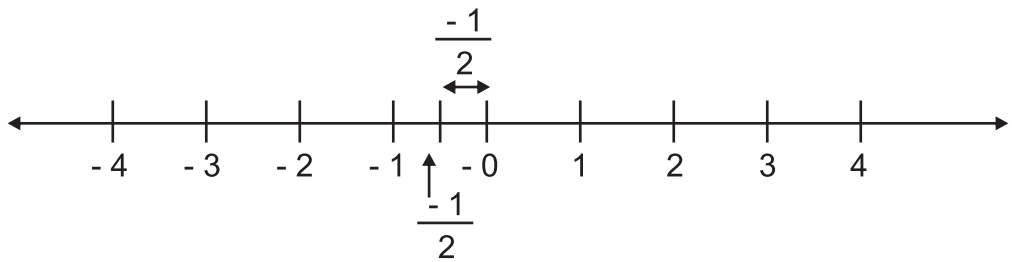
$$\frac{-5}{7} \times \frac{2}{2} = \frac{-10}{14}, \quad \frac{-5}{7} \times \frac{3}{3} = \frac{-15}{21} \quad \frac{-5}{7} \times \frac{-2}{-2} = \frac{10}{-14}$$

इसी प्रकार $\frac{10}{-15} = \frac{10 \div 5}{-15 \div 5} = \frac{2}{-3}$

$$\frac{10}{-15} = \frac{10 \div (-5)}{(-15) \div (-5)} = \frac{-2}{3}$$

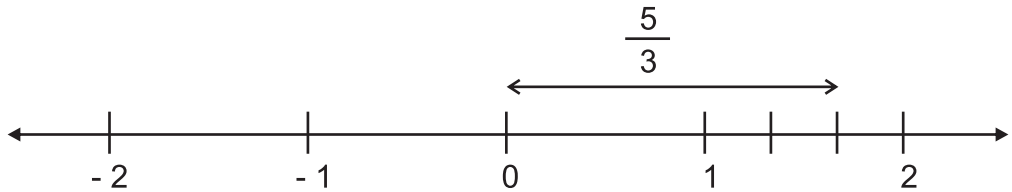
अतः $\frac{10}{-15} = \frac{2}{-3} = \frac{-2}{3}$ समतुल्य है।

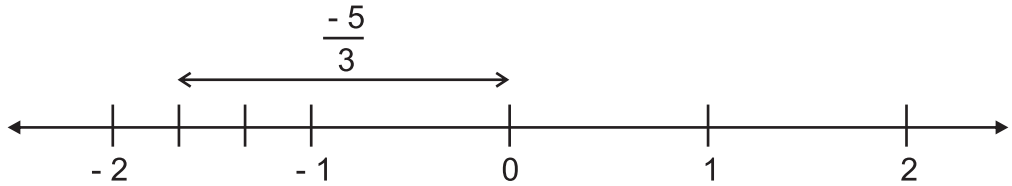
7.4 संख्या रेखा पर परिमेय संख्याएँ



(i) $\frac{-1}{2}$ को संख्या रेखा पर प्रदर्शित करने के लिए 0 और –1 के बीच दो बराबर–बराबर भाग करते हैं। फिर 0 और –1 के ठीक बीच में $\frac{-1}{2}$ अंकित करते हैं।

(ii) $\frac{5}{3}$ को संख्या रेखा पर प्रदर्शित करने के लिए 0 के दाईं और 1 और 2 के बीच तीन बराबर–बराबर भाग करते हैं और 1 के दाईं ओर से दूसरा भाग $\frac{5}{3}$ को निरूपित करते हैं। इसी प्रकार $\frac{-5}{3}$ को निरूपित करने के लिए 0 के बाईं और उतनी ही दूरी पर अंकित होगी।





7.5 सरलतम रूप में परिमेय संख्याएँ

$\frac{-36}{24}$ को सरलतम रूप में व्यक्त कीजिए।

$$\frac{-36}{24} = \frac{-36 \div 3}{24 \div 3} = \frac{-12}{8} = \frac{-12 \div 4}{8 \div 4} = \frac{-3}{2}$$

या $\frac{-36}{24} = \frac{-36 \div 12}{24 \div 12} = \frac{-3}{2}$ समतुल्य है।

अतः $\frac{-36}{24}$ का सरलतम रूप $\frac{-3}{2}$ है।

7.6 परिमेय संख्याओं की तुलना

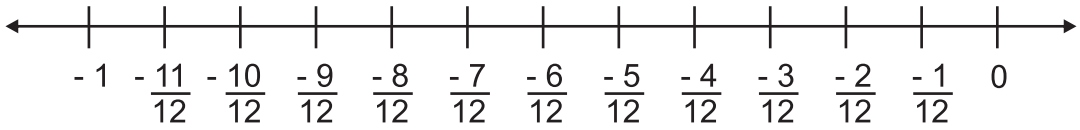
धनात्मक परिमेय संख्याओं की तुलना भिन्नों की तुलना की तरह करते है। जैसे $\frac{3}{7}$ और $\frac{5}{9}$ में बड़ा पता लगाने के लिए पहले हर समान करते हैं।

$$\frac{3}{7} \times \frac{9}{9} = \frac{27}{63}, \quad \frac{5}{9} \times \frac{7}{7} = \frac{35}{63}$$

अतः $\frac{5}{9} > \frac{3}{7}$

परन्तु दो ऋणात्मक परिमेय संख्याओं की तुलना संख्या रेखा पर करके देखते हैं।

$\frac{-1}{4}$ और $\frac{-1}{3}$ संख्याओं पर निरूपित कर पता लगाते हैं।



संख्या रेखा पर $\frac{-1}{4}$, $\frac{-1}{3}$ के दाईं तरफ है अतः $\frac{-1}{4}$, $\frac{-1}{3}$ से बड़ा है। यदि एक ऋणात्मक परिमेय संख्या व एक धनात्मक परिमेय संख्या हो तो स्पष्ट है कि ऋणात्मक परिमेय संख्या सदैव एक धनात्मक परिमेय संख्या से छोटी होती है।

$$\frac{-1}{2} < \frac{1}{2}, \quad \frac{-9}{4} < \frac{3}{2}$$

यदि $\frac{-4}{-7}$ और $\frac{-3}{-5}$ की तुलना करनी है तो इन्हे मानक रूप में बदलने के बाद तुलना करते हैं।

$\frac{-4}{-7}$ और $\frac{-3}{-5}$ का मानक रूप क्रमशः $\frac{4}{7}$ और $\frac{3}{5}$ है।

$$\frac{4}{7} < \frac{3}{5}$$

7.7 दो परिमेय संख्याओं के बीच परिमेय संख्याएँ

दो पूर्णांकों के बीच में पूर्णांकों की संख्या सीमित होती है। जैसे –3 और 3 के बीच पूर्णांक –2,–1,0, 1, 2 है एवं 5 और 8 के बीच पूर्णांक 6, 7 हैं।

यदि दो परिमेय संख्याएँ $\frac{-4}{3}$ और $\frac{-1}{2}$ के बीच परिमेय संख्याएँ ज्ञात करना है तो पहले इन्हे समान हर वाली परिमेय संख्याओं में बदल कर इनके बीच को परिमेय संख्या लिखी जाती है।

जैसे $\frac{-4}{3}$ और $\frac{-1}{2}$ के बीच परिमेय संख्याएँ लिखिए।

$$\frac{-4}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{-8}{6} \qquad \frac{-1}{2} \times \frac{3}{3} = \frac{-3}{6}$$

$\frac{-7}{6}, \frac{-6}{6}, \frac{-5}{6}, \frac{-4}{6},$ बीच की परिमेय संख्याएँ हैं। इस विधि से हम दो परिमेय संख्याओं के बीच में जितनी चाहे उतनी परिमेय संख्या ज्ञात कर सकते हैं

जैसे $\frac{-4}{3} \times \frac{4}{4} = \frac{-16}{12} \qquad \frac{-1}{2} \times \frac{6}{6} = \frac{-6}{12}$

अतः $\frac{-4}{3}$ व $\frac{-1}{2}$ के बीच परिमेय संख्याएँ इस प्रकार हैं

$$\frac{-15}{12}, \frac{-14}{12}, \frac{-13}{12}, \frac{-12}{12}, \frac{-11}{12} \text{ ---- } \frac{-7}{12}$$

प्रश्नावली 7

1. $\frac{-2}{3}$ व $\frac{-7}{4}$ की पांच समतुल्य परिमेय संख्याएँ लिखिए।

2. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को उनके सरलतम रूप में लिखिए।

   (i) $\frac{44}{-72}$ (ii) $\frac{-16}{20}$

3. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए।

   (i) $\frac{7}{8}$ (ii) $\frac{-8}{3}$

4. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के बीच तीन परिमेय संख्याएँ लिखिए।

   (i) $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{4}$ (ii) - 2 और 0

   (iii) $\frac{-4}{5}$ और $\frac{-5}{7}$ (iv) - 3 और –1

5. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को आरोही क्रम में लिखिए।

   (i) $\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{1}{6}, \frac{5}{9}$ (ii) $\frac{-3}{4}, \frac{-3}{7}, \frac{-3}{2}$

6. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को अवरोही क्रम में लिखिए।

   (i) $\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-5}{6}, \frac{4}{-3}$ (ii) $\frac{3}{5}, \frac{-17}{-30}, \frac{8}{-15}, \frac{-7}{10}$

अध्याय 8

घात और घातांक

8.1 बहुत बड़ी व बहुत छोटी संख्याओं को घातांकीय रूप में प्रकट कर उन्हें पढ़ना, समझना, तुलना करना और उन पर संक्रिया करना सरल होता है।

जैसे - $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$, $10000000 = 10^7$

$9 \times 9 \times 9 = 9^3$

इन्हे इस रूप में लिखा जाता है $a \times a \times a - - - - n = a^n$

जहाँ a आधार है व n घातांक है। a^n को a की घात n पढ़ते हैं।

उदाहरण 1 घातांक रूप में व्यक्त कीजिए।

$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$

$125 = 5 \times 5 \times 5 = 5^3$

उदाहरण 2 324 को अभाज्य गुणनखण्डों की सहायता से घातों के रूप में व्यक्त कीजिए।

2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
3	3

$324 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$= 2^2 \times 3^4$

उदाहरण 3 सरल कीजिए।

$5^2 \times 2^3$

$= 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 25 \times 8$

$= 200$

उदाहरण 4 मान ज्ञात कीजिए।

(i) $(-1)^3 = -1 \times -1 \times -1 = -1$

(ii) $(-4)^2 \times (-2)^3$

$= (-4) \times (-4) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$

$= 16 \times (-8) = (-128)$

उदाहरण 5 बड़ी संख्या पहचानिए।

2^5 या 5^2

$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

$5^2 = 5 \times 5 = 25$

अतः $2^5 > 5^2$

प्रश्नावली 8.1

(1) **घातांक रूप में व्यक्त कीजिए।**

(i) $a \times a \times a \times b \times b$ (ii) $5 \times 5 \times t \times t \times t$

(2) **घातांक रूप में व्यक्त कीजिए।**

(i) 81 (ii) 343

(3) **बड़ी संख्या को पहचानिए।**

(i) 3^5 या 5^3 (ii) 3^{10} या 10^3 (iii) 7^3 या 3^7

(4) **अभाज्य गुणनखण्डों की घातों के रूप में व्यक्त कीजिए।**

(i) 625 (ii) 1800

(5) **मान ज्ञात कीजिए।**

(i) $(-9)^4$ (ii) $(-4)^2 \times (-3)^2$ (iii) 0×10^4

(6) **सरल कीजिए।**

(i) $7^3 \times 5$ (ii) $5^3 \times 2^2$

8.2 घातांकों के नियम

नियम – 1 एक ही आधार वाली घातीय संख्याओं का गुणा

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ यहाँ आधार a के लिए

m व n दो धनात्मक पूर्णांक है।

उदाहरण 6 $(-5)^3 \times (-5)^2 = (-5)^{3+2} = (-5)^5$

नियम – 2 एक ही आधार वाली घातीय संख्याओं का भाग

$a^m \div a^n = a^{m-n}$ जहाँ $m > n$ और m व n दो धनात्मक पूर्णांक हों।

$a^m \div a^n = \dfrac{1}{a^{n-m}}$ जहाँ $n > m$ और m व n दो धनात्मक पूर्णांक हों।

उदाहरण 7 $3^7 \div 3^4$ का हल कीजिए।

$$= \frac{3^7}{3^4} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$$

इस प्रकार $3^7 \div 3^4 = 3^{7-4} = 3^3$

उदाहरण 8 $2^3 \div 2^5$ को सरल कीजिए।

$$= \frac{2^3}{2^5} = \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{2^2}$$

इस प्रकार $2^3 \div 2^5 = \dfrac{1}{2^{5-3}} = \dfrac{1}{2^2}$ जहाँ $n > m$ हो

उदाहरण 9 $5^5 \div 5^5$ को सरल कीजिए।

$$= \frac{5^5}{5^5} = \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5} = 1$$

$$\frac{5^5}{5^5} = 5^{5-5} = 5^0 = 1$$

यदि किसी आधार की घात शून्य है तो उसका मान 1 होता है।

अतः $a^0 = 1$

नियम – 3 घातीय संख्या की घातांक

$(a^m)^n = a^{mn}$ जहाँ m तथा n दो धनात्मक पूर्णांक है।

उदाहरण 10 $[(2)^3]^4 = 2^{3x4} = 2^{12}$

नियम – 4 पृथक आधार किन्तु समान घातांक वाली संख्याओं का गुणन

$a^m \times b^m = (a \times b)^m$ जहाँ m धन पूर्णांक हो।

उदाहरण 11 $2^4 \times 3^4$ का सरल करो।

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3)$

$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) = (2 \times 3)^4$

अर्थात् $2^4 \times 3^4 = (2 \times 3)^4$

अर्थात् $2^4 \times 3^4 = (2 \times 3)^4 = 6^4$

नियम – 5 $a^m \div b^m = \dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$ जहाँ a व b दो शून्येत्तर परिमेय संख्या हो तथा m एक धन पूर्णांक हो

उदाहरण 12 $7^5 \div 8^5$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$= \frac{7^5}{8^5} = \frac{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8} = \frac{7}{8} \times \frac{7}{8} \times \frac{7}{8} \times \frac{7}{8} \times \frac{7}{8} = \left(\frac{7}{8}\right)^5$$

अर्थात् $7^5 \div 8^5 = \left(\dfrac{7^5}{8^5}\right) = \left(\dfrac{7}{8}\right)^5$

प्रश्नावली 8.2

1. घातांक नियमों का प्रयोग करते हुए हल कीजिए।

(i) $2^7 \times 2^6$ (ii) $3^{10} \div 3^4$ (iii) $t^4 \div t^7$

(iv) $(a^5)^{-7}$ (v) $5^8 \times 5^{-5}$ (vi) $(2^4 \times 2^3) \div 2^5$

(vii) $3^5 \div 3^5$ (viii) $(8^3)^0$

2. सरल कीजिए।

(i) $2^0 + 3^0 + 4^0$ (ii) $\dfrac{3^9 \times a^6}{9^2 \times a^3}$ (iii) $(5^3 \times 5)^3$

(iv) $\dfrac{(3^2)^3 \times 5^3}{9^2 \times 25}$ (v) $\dfrac{2^5 \times 10^5 \times 5}{5^4 \times 4^3}$ (vi) $2^0 \times 3^0 \times 4^0$

बड़ी संख्याओं को घातांकों में अर्थात् मानक रूप में व्यक्त करना।

जब किसी संख्या 1.0 से बड़ी या 10 से छोटी एक दशमलव संख्या और 10 की घात के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाता है तो संख्या के इस रूप को मानक रूप कहते हैं।

उदाहरण 13 4659 को मानक रूप में लिखिए।

$$4659 = 4.659 \times 1000$$

$$= 4.659 \times 10^3$$

यहाँ दशमलव चिन्ह तीन स्थान बाईं ओर खिसक गया है।

उदाहरण 14 संख्या 160, 000, 000, 000 $= 1.6 \times 10^{11}$

(दशमलव बिन्दु 11 स्थान बाईं ओर खिसक गया है।)

उदाहरण 15 2.5×10^4 को सरल रूप में व्यक्त कीजिए।

$$= \frac{2.5}{10} \times 10^4 = \frac{25 \times 10000}{10} = 25000$$

प्रश्नावली 8.3

1. संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए।

   (i) 39400,00,00,000 (ii) 3000000

   (iii) 18000 (iv) 48, 30, 000

2. सरल रूप में व्यक्त कीजिए।

   (i) $4.60 \times (10)^5$ (ii) $1.21 \times (10)^{-8}$

   (iii) $1.75 \times (10)^6$ (iv) $2.75 \times (10)^3$

अध्याय 9

वैदिक गणित

9.1 आपने भाग 'अ' में एकाधिकेन पूर्वेण, एकन्यूनेन पूर्वेण, परममित्र अंक, निखिलम से गुणा सीखा था। इस अध्याय में विनकूलम, विनकूलम से योगः व्यवकलन एवं भाग की अन्य विधियों का अध्ययन करेंगे।

9.2 विनकूलम

यदि दो अंकों का योगफल 10 के बराबर होता है तो अंक एक दूसरे के परममित्र अंक कहलाते हैं। संख्या आधार 10 से कितना कम है उसे ऋणात्मक रूप में दिखाने हेतु अंक के ऊपर रेखा बंधनी लगाते हैं जिन्हें विनकूलम् कहते हैं। यहाँ पर 5 से बड़े अंको को छोटे अंको में बदलने से गणनाएँ छोटी सरल और आसान हो जाती है जैसे 8 अंक 10 से 2 कम है

अतः $8 = 10 - 2$

$= 10 + \bar{2}$ (विनकूलम 2)

$8 = 1\bar{2}$

उदाहरण 1 79 को विनकूलम संख्या में बदलिए। (एकाधिकेन पूर्वेण + परममित्र अंक)

$= \dot{7}\,\bar{1}$

$= 8\bar{1}$

$= \dot{0}\,\bar{2}\,\bar{1}$

$= 1\,\bar{2}\,\bar{1}$

संकेत

(i) 9 के परममित्र अंक 1 पर विनकूलम रेखा

(ii) 9 के पूर्वेण अंक 7 पर एकाधिक चिन्ह $\dot{7}$

(iii) $\dot{7} = 8$ अतः 8 का परममित्र अंक 2 पर विनकूलम रेखा

उदाहरण 2 $2\bar{4}$ को सामान्य संख्या में बदलिए। (एकन्यूनेन पूर्वण + परममित्र अंक)

$= 2\,\bar{4}$

$= \underset{\cdot}{2}\,6$

$= 1\,6$

संकेत

(i) 4 के धनात्मक 4 का परममित्र अंक 6 लिखिए।

(ii) $\bar{4}$ के पूर्वण अंक 2 पर एकन्यून चिन्ह लगाइए जैसे $\underset{\cdot}{2}$

(iii) $\underset{\cdot}{2} = 1$ लिखिए

उदाहरण 3 $5\,\bar{3}\,\bar{2}$ को सामान्य संख्या में बदलिए। (एकन्यूनेन पूर्वण + परममित्र अंक)

$= \underset{\cdot}{5}\,7\,\bar{2}$

$= 4\,7\,\bar{2}$

$= 4\,\underset{\cdot}{7}\,8$

$= 4\,6\,8$

संकेत

(i) दहाई के स्थान के 3 के धनात्मक मान 3 का परम मित्र अंक 7 लिखिए।

(ii) 3 के पूर्वेण अंक 5 पर एकन्यून चिन्ह लगाइए जैसे $\underset{\cdot}{5} = 4$

(iii) इकाई के स्थान पर 2 के धनात्मक 2 का परममित्र अंक 8 लिखिए।

(iv) $\bar{2}$ के पूर्वण अंक 7 पर एकन्यून चिन्ह $\underset{\cdot}{7}$ लगाइए।

(v) $\underset{\cdot}{7} = 6$ लिखिए।

विनकूलम संख्याओं के प्रयोग में सामान्य संख्याओं की भाँति ही योग एवं व्यवकलन किया जाता है।

जैसे – (i) $\bar{2} + \bar{3} = \bar{5}$ (ii) $\bar{1}\,\bar{3} + \bar{2}\,\bar{5} = \bar{3}\,\bar{8}$

(iii) $2 + \bar{2} = 0$

(iv) $8 + \bar{3} = 5 + 3 + \bar{3} = 5$ ($8 = 5 + 3$ लिखिए एवं $3 + \bar{3} = 0$ होता है।)

(v) $\bar{2} - 3 = \bar{2} + \bar{3} = \bar{5}$ ($\because -3 = +\bar{3}$ (vi) $\bar{1}\,\bar{2} - 3\,5 = \bar{1}\,\bar{2} + \bar{3}\,\bar{5} = \bar{4}\,\bar{7}$

9.3 गुणनसंक्रिया (सूत्र निखिलम् द्वारा)

आप ने भाग 'अ' में आधार 10 पर आधारित गुणा के सवाल हल किए थे जब आधार 100 हो तब गुणनसंक्रिया को कैसे करते हैं ? आओ प्रयास करें –

उदाहरण 4 101 × 105

संख्या	विचलन
101	+ 01
105	+ 05

(101 + 05) या (+ 01 x + 05)
(105 + 01)

= 106 / 5
= 106 / 05
= 10605

संकेत

(i) गुणनसंख्या 101 जो कि 100 से 1 अधिक व 105 जो कि 100 से 5 अधिक है जिसे विचलन के रूप में + 01 व + 05 लिखते हैं।

(ii) संख्या को ऊपर नीचे एवं उनके विचलन उनके सामने लिखिए।

(iii) विचलनों का गुणनफल +01 × +05 = 5 तिरछी रेखा के दाहिनी ओर लिखें।

(iv) बाएँ पक्ष में 101 + 05 या 105 + 01 = 106 लिखिए।

(v) दाहिने पक्ष में (विचलन का गुणनफल +5 है अतः +5 की जगह 05 लिखिए क्योंकि आधार 100 में दो शून्य है) अतः दाहिने पक्ष में दो अंक रहेंगे।

(vi) तिरछी रेखा हटाने पर गुणनफल 106.05

9.4 भागसंक्रिया (सूत्र निखिलम् द्वारा)

पीछे हमने निखिलम से गुणा किए जो सामान्य विधि से सरल है। इसी प्रकार निखिलम् विधि से भाग संक्रिया भी बड़ी सरल है। इसी प्रकार वैदिक गणित में गुणन संक्रिया की तरह भाग संक्रिया में भी 10 व 100 को आधार मान कर बड़ी सरलता से भाग दिया जा सकता है।

भाग की विधि

(i) भाजक का निकटतम आधार निश्चित कर उसकी पूरक संख्या (परममित्र) ज्ञात करेंगे। (पूरक संख्या) = आधार – भाजक संख्या

(ii) भाग संक्रिया में निर्धारित स्थान पर दो खड़ी रेखा द्वारा तीन खण्डों में बाँटिए।

(iii) बाईं ओर के प्रथम खण्ड में भाजक व उसके नीचे उसकी पूरक संख्या लिखिए।

(iv) आधार में जितने शून्य है भाज्य के उतने ही अन्तिम अंक तीसरे खण्ड में लिखिए।

(v) भाज्य के शेष अंक मध्य खण्ड में लिखिए।

उदाहरण 5 **124 ÷ 9**

यहाँ भाजक 9 का निकटतम आधार = 10

पूरक संख्या = आधार – भाजक संख्या

= 10 – 9

= 1

आधार 10 में एक शून्य अतः तीसरे खण्ड में भाजक के अंतिम अंक 4 को लिखेंगे।

मध्य खण्ड में भाज्य का अंक 1 2

	प्रथम खण्ड	मध्य खण्ड		तृतीय खण्ड
संख्या	9	1	2	4
पूरक अंक	1	↓	1 ↓	—— 3
		1	3	7

संकेत

(i) मध्य खण्ड का 1 योग के स्थान पर लिखेंगे।

(ii) यह अंक 1 × पूरक संख्या 1 = 1, 2 के नीचे लिखेंगे।

(iii) योग 2 + 1 = 3 नीचे लिखे योग के स्थान पर।

(iv) पुनः गुणनफल 3 × पूरक संख्या 1 = 3

(v) गुणनफल 3 लिखें तृतीय खण्ड में 4 के नीचे योग 4 + 3 = 7 लिखेंगे।

(vi) अतः भाजक = 9, भागफल = 13 शेषफल = 7

उदाहरण 6 आधार 100 लेकर 1014 ÷ 87 में भाग दीजिए –

1014 ÷ 87

	प्रथम खण्ड		मध्य खण्ड		तृतीय खण्ड	
संख्या	8	7	1	0	1	4
पूरक अंक	1	3	↓	1 ↓	3	——
					1	3
			1	1	5	7

संकेत पूर्व की भाँति

अतः भागफल = 11 शेषफल = 57

प्रश्नावली 9.1

1. सामान्य संख्या को विनकूलम संख्या में बदलिए। (एकधिकेन पूर्वेण + परममित्र अंक)

   (i) 37 (ii) 98

2. विनकूलम संख्या को सामान्य संख्या में बदलिए। (एकन्यूनेन पूर्वेण + परममित्र अंक)

   (i) $1\ 3\ \bar{2}$ (ii) $5\ 2\ \bar{4}$

3. गुणा कीजिए। (सूत्र निखिलम्)

   (i) 12 x 13 (ii) 8 x 7 (iii) 102 x 104 (iii) 94 x 96

4. भाग दीजिए (सूत्र निखिलम्)

   (i) 103 ÷ 8 (ii) 298 ÷ 96

9.5 संकलन – व्यवकलनाभ्याम्

शाब्दिक अर्थ संकलन इकट्ठा (जोड़ करना) व्यवकलनाभ्याम् (घटाव करके) इस विधि का उपयोग गणना को आसान बनाने के लिए करते है इसमें आधार संख्या की पूर्णता पर आधारित है जो कि 10 या 10 का गुणक होता है। इसमें पूर्ण आधार वाली संख्याओं के साथ विचलन कर बड़ी से बड़ी गणनाओं को आसान बनाया जाता है।

उदाहरण 7 8 + 11 + 7 + 12 + 9 + 13 का योग कीजिए।

हल इन संख्याओं को ध्यान से देखने पर पता चलता है कि 8, 10 से 2 कम है एवं 12,10 से 2 अधिक है। इसी प्रकार 9, 10 से 1 कम है एवं 11, 10 से 1 अधिक है।

8 + 11 + 7 + 12 + 9 + 13

(10 - 2) + (10 + 1) + (10 - 3) + (10 + 2) + (10 - 1) + (10 + 3)

पूर्ण आधार वाली संख्याओं के रूप में दर्शा कर व्यवस्थित करने पर

$(10 - \cancel{2}) + (10 + \cancel{2}) + (10 + \cancel{1}) + (10 - \cancel{1}) + (10 + \cancel{3}) + (10 - \cancel{3})$

$= 20 + 20 + 20$

$= 60$

यहाँ पर – 2, 2, 1, – 1 एवं – 3, 3 ऐसे युग्म हैं जिनके योग – $2+2, 1-1, -3+3$ शून्य हैं।

9.6 पूरणापूरणाभ्याम्

इस विधि में संख्याओं के ऐसे युग्म बनाएँ जिनसे संख्याएँ 10 के गुणित में हो जाएँ।

उदाहरण 8 $27 + 58 + 392 + 68 + 32 + 23$

$= (27 + 23) + (58 + 392) + (68 + 32)$ (10 के गुणित में बनाने का प्रयास)

$= (50 + 450) + 100$

$= (50 + 450) + 100$

$= 500 + 100$

$= 600$

प्रश्नावली 9.2

(1) संकलन, व्यवकलनाभ्याम् एवं पूरणा पूरणाभ्याम् का उपयोग करते हुए हल कीजिए।

(i) 26 + 47 + 107 + 63 + 13 + 44

(ii) 52 + 136 + 48 + 64

(iii) 45 + 67 + 38 + 55 + 62 + 33

9.7 गुणा सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण विधि

9.7.1 (i) किसी संख्या को 9 से गुणा

उदाहरण 9 6 को 9 से गुणा कीजिए।

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times\ 9 \\ \hline = \underline{6}\,/\,9 - \underline{6} \\ = 5\,/\,9 - 5 \\ = 5\,/\,4 \\ = 54 \end{array}$$

संकेत

(i) एक न्यूनेन पूर्वेण सूत्र का उपयोग करते हुए 6 में एक न्यूनेन का चिन्ह तिरछी रेखा के बाएँ पक्ष में लगाया।

(ii) दाएँ पक्ष में 9 में से एक न्यूनेन लगा गुण्य $\underline{6}$ को घटाया।

(iii) तिरछी रेखा को हटाने पर = 54

उदाहरण 10 13 को 9 से गुणा कीजिए।

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times\ 9 \\ \hline 1\dot{3} \,/\, 9 - 1\dot{3} \end{array}$$

= 12 / 9 - 12

= 12 / - 3 या $(\overline{3})$

= $1\,2\,\overline{3}$

= $1\,\dot{2}\,7$

= 1 1 7

संकेत

(i) यहाँ गुणक 9 ही है परन्तु गुण्य 9 से बड़ा है।

(ii) एक न्यूनेन पूर्वेण सूत्र का उपयोग करते हुए $1\dot{3}$ का एक न्यून $1\dot{3}$ = 12 तिरछी रेखा के बाईं ओर लिखेंगे।

(iii) तिरछी रेखा के दाएँ ओर 9 में से 13 का एक न्यून (9–12) को घटाया।

(iv) तिरछी रेखा के बाएँ भाग में दहाई 12 व दाएँ भाग में – 3 या $\overline{3}$ है।

(v) तिरछी रेखा को हटाकर $1\ 2\ \overline{3}$ को सामान्य संख्या में बदलने पर 117 प्राप्त होता है।

9.7.2 किसी संख्या का 99 से गुणा

99 से गुणा करने की विधि भी वही है जो 9 से गुणा करने की विधि है। आओ इन्हें हल करते हैं।

उदाहरण 11 18 x 99 को हल कीजिए।

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times\ 99 \\ \hline 1\dot{8} \,/\, 99 - 1\dot{8} \end{array}$$

= 18 / 99 - 17

= 17 / 82

= 1782

संकेत पूर्वानुसार

उदाहरण 12 99 x 99 को हल कीजिए।

$$\begin{array}{r} 99 \\ \times\ 99 \\ \hline 9\dot{9} \,/\, 99 - 9\dot{9} \end{array}$$

= 98 / 99 - 98

= 98 / 1 ←

= 98 / 01

= 9801

तिरछी रेखा के दाएँ पक्ष में आधार 100 है अतः यहाँ दो अंकों की संख्या होगी लेकिन यहाँ एक ही है इसलिए इसे 01 लिखेंगे।

9.8 वर्ग

किसी संख्या की वर्ग संख्या ज्ञात करने के लिए उस संख्या से गुणा करते हैं। आइए वर्ग संख्या ज्ञात करने के कुछ सरल तरीकों पर चर्चा करते हैं।

(1) दो/तीन अंकों की ऐसी संख्याओं के वर्ग ज्ञात करना जिनका इकाई का अंक 5 है –

(i) $15 \times 15 = 1 \times \dot{1} / 5 \times 5$ (एकाधिकेन पूर्वेण दहाई अंक का)

$= 1 \times 2 / 25$ $\quad \dot{1} = 1 + 1 = 2$

$= 2 / 25$

$= 225$

(ii) $35 \times 35 = 3 \times \dot{3} / 5 \times 5$ (एकाधिकेन पूर्वेण दहाई स्थान पर)

$= 3 \times 4 / 25$

$= 12 / 25$

$= 1225$

(iii) $105 \times 105 = 10 \times 1\dot{0} / 5 \times 5$

$= 10 \times (10 + 1) / 25$

$= 10 \times 11 / 25$

$= 110 / 25$

$= 11025$

(iv) $125 \times 125 = 12 \times 1\dot{2} / 5 \times 3$

$= 12 \times 13 / 25$

$= 156 / 25$

$= 15625$

अतः उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि इकाई पर 5 अंक वाली संख्याओं को उसी संख्या से गुणा करने पर या उसका वर्ग ज्ञात करने पर अंत में 25 अवश्य आता है। पूर्व दहाई वाली संख्या को एकाधिक संख्या से गुणा करके लिखते हैं।

वर्ग के कुछ अन्य तरीके –

11×11

1 2 1 ← इकाई की संख्या का वर्ग $1 \times 1 = 1$

इकाई एवं दहाई की संख्याओं का गुणा एवं उसका दुगुना $(1 \times 1) \times 2 = 2$

दहाई की संख्या का वर्ग $1 \times 1 = 1$

21 × 21 — 21 × 21 में इकाई की संख्या का वर्ग = 1 × 1 = 1

इकाई एवं दहाई की संख्याओं का गुणा एवं दुगुना = (1 × 2) × 2 = 4

दहाई की संख्या का वर्ग = 2 × 2 = 4

21 × 21 = 441

13 × 13 = इकाई की संख्या का वर्ग = 3 × 3 = 9

= इकाई एवं दहाई की संख्या का गुणा एवं दुगुना (1 × 3) × 2 = 6

= दहाई की संख्या का वर्ग = 1 × 1 = 1

= अतः संख्या 13 का वर्ग = 169

तीन अंकों की संख्याओं का वर्ग ज्ञात करने के लिए उसे दो भागों में बाँटते हैं जिनका उपसूत्र ''आनुरूप्येण विधि से वर्ग ज्ञात करते है।

9.9 आनुरूप्येण

''आनुरूप्येण'' का अर्थ अनुरूपता अथवा समानुपात द्वारा''।

जैसे 132 × 132 का वर्ग ज्ञात करना है तो 132 को 13 दहाई व 2 इकाइयों में बाँटा गया है।

132 × 132 — इकाई की संख्या का वर्ग = 2 × 2 = 4

इकाई एवं दहाई की संख्या का गुणा दुगुना = (2 × 13) × 2

दहाई की संख्या का वर्ग = $(13)^2$ = 169

132 × 132

= 169 / 52 / 4

= 169 / 5 2 / 4

= 169 + 5 / 24

= 17424

अतः आनुरूप्येण विधि से जिस संख्या का वर्ग करना है उसको

(i) दाएँ से प्रथम भाग में दाईं संख्या का वर्ग ज्ञात करना।

(ii) मध्य भाग में मूल संख्या में स्थित अंकों को गुणा व उसका दुगुना करते हैं।

(iii) तीसरे भाग में मूल संख्या में स्थित दूसरे अंक का वर्ग करना।

(iv) संख्या को व्यवस्थित करना।

उदाहरण 13 संख्या 43 का वर्ग ज्ञात कीजिए।

$(43)^2$ =

III	II	I
4^2	4 x 3 + 4 x 3	3^2
16	12 + 12	9
16	24	9
= 18	4	9

= 1849

उदाहरण 14 123 का वर्ग ज्ञात कीजिए।

12 3

III	II	I
$(12)^2$	12 x 3 + 12 x 3	3^2
144	36 + 36	9
= 144	72	9
= 144 + 7	2	9

= 15129

प्रश्नावली 9.3

1. एकन्यूनेन पूर्वेण सूत्र लगाकर गुणा कीजिए।

   (i) 7 × 9 (ii) 15 × 9 (iii) 81 × 99

   (iv) 86 × 99 (v) 32 × 99

2. उपयुक्त सूत्र लगाकर वर्ग ज्ञात कीजिए।

   (i) 25 × 25 (ii) 45 × 45 (iii) 115 × 115

   (iv) 135 × 135 (v) 53^2 (vi) 84^2

9.10 वर्गमूल (उपसूत्र विलोकनम्)

किसी संख्या x को उसी संख्या x से गुणा किया जाए तो प्राप्त मान x^2 संख्या x की वर्ग संख्या है। इसे इस तरह समझा जाए कि

$x^2 = x \times x$ का एक युग्म है। अतः x^2 का वर्गमूल x है।

9 एक वर्ग संख्या है जो 3 × 3 का एक युग्म है अतः 9 का वर्गमूल 3 है।

वर्गमूल ज्ञात करने की वैदिक विधि –

1. यदि संख्या पूर्ण वर्ग हो तो उसके वर्गमूल में अंकों की संख्या ज्ञात करेंगे।

2. इकाई अंक का पता लगाएँगे।

संख्या का चरम अंक	वर्गमूल का चरम अंक
1	1 या 9
4	2 या 8
5	5
6	4 या 6
9	3 या 7

3. अब विलोकनम् विधि से निम्न दूसरी सारणी द्वारा ज्ञात कीजिए कि पूर्ण वर्ग संख्या के वर्गमूल का दहाई अंक क्या है ?

संख्या समूह	वर्गमूल में दहाई का अंक
1 – 3	1
4 – 8	2
9 – 15	3
17 – 24	4
25 – 35	5
36 – 48	6
49 – 63	7
64 – 80	8
81 – 99	9

समूह 1–3 का अर्थ है कि इस समूह में 1, 2 व 3 संख्याएँ है और इन तीनों का सम्भावित वर्गमूल एक माना जा सकता है। आओ वर्गमूल ज्ञात करने की विलोकनम् विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट करे।

उदाहरण 15 **संख्या 361 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।**

हल संख्या को देखने पर निम्न निष्कर्ष प्राप्त हुए।

(i) संख्या 361 का इकाई अंक 1 है अतः पूर्ण वर्ग संख्या हो सकती है

(ii) इस संख्या के वर्गमूल में दो अंक हो सकते है।

(iii) संख्या 361 में दाहिनी ओर से दो–दो अंको के जोड़े बनाने पर दूसरे जोड़े में संख्या 3 रहती है अतः संख्या के वर्गमूल का दहाई अंक एक होगा।

(iv) संख्या का चरम अंक 1 है अतः वर्गमूल 1 का चरम 1 या 9 होगा एवं दहाई अंक 3 है जो 1–3 समूह में होने से वर्गमूल में दहाई का अंक 1 होगा।

(v) इस प्रकार 361 का वर्गमूल 11 अथवा 19 हो सकता है।

(vi) वर्गमूल में दहाई अंक 1 को उसके एकाधिक (i = 2) से गुणा कीजिए।

गुणनफल = 1 × 2 = 2 दूसरे जोड़े का 3 > गुणनफल 2

अतः 11 अथवा 19 में से बड़ा वर्गमूल लेते हैं।

अतः 361 का वर्गमूल = 19

उदाहरण 16 संख्या 5184 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल (i) प्रथम जोड़ा = 84 तथा द्वितीय जोड़ा = 51

(ii) प्रथम जोड़े का चरमं अंक = 4 अतः सम्भावित वर्गमूल का चरम अंक 2 या 8 हो सकता है।

(iii) 51 में समाहित सबसे बड़ा वर्गमूल अंक = 7 अतः सम्भावित वर्गमूल 72 या 78। गुणनफल = 7 × 8 = 56।

(iv) 51 < 56 है अतः छोटी संख्या ही वर्गमूल होगी।

अतः संख्या 5184 का वर्गमूल = 72

9.11 भाग संक्रिया (सूत्र परावर्त्य योजयेत्)

जब भाजक आधार के निकट होता है तब उस विधि में भाजक की आधार संख्या से भाज्य में भाग देकर अनुमानित भागफल एवं शेषफल प्राप्त होता है।

इसके दो प्रकार है (1) जब भाजक आधार संख्या से बड़ा हो।

(2) जब भाजक आधार संख्या से छोटा हो।

(1) जब भाजक आधार संख्या से बड़ा हो –

(i) भाजक का आधार संख्या से विचलन ज्ञात करते है।

(ii) विचलन का परावर्त्य करके संशोधन गुणक ज्ञात करते हैं। चिह्न बदलते हैं।

(iii) भाज्य का प्रथम अंक छोडकर संशोधन गुणक से भाग देते हैं।

(iv) भाग संक्रिया को 3 खण्डों में विभाजित करना है।

उदाहरण 17 4656 ÷ 11 को हल कीजिए –

भाजक	11	4	6	5	6
आधार	10	↓	$\bar{4}$	—	—
विचलन	1	↓	↓	$\bar{2}$	
संशोधन गुणांक (परिवर्तित अंक)	$\bar{1}$	↓	↓	↓	$\bar{3}$
भागफल →		4	2	3	3 (शेषफल)

संकेत (i) भाजक 11 आधार 10 के पास अतः विचलन = 1 संशोधन गुणांक = $\bar{1}$ आधार 10 में एक शून्य है तो तृतीय खण्ड में 1 अंक भाज्य संख्या से लिखेंगे।

(ii) भाज्य संख्या का बाईं ओर का प्रथम अंक नीचे लिखिए।

(iii) प्रथम अंक 4 को संशोधन गुणांक $\bar{1}$ से गुणा करके भाज्य के आगे की संख्या के नीचे लिखिए।

(ii) घटाकर नीचे लिखना फिर उसका संशोधन गुणांक से गुणा करना / इसी क्रिया की आगे तब तक करेंगे। जब तक तृतीय खण्ड में अंक न आ जाएँ।

भागफल = 423

शेषफल = 3

9.12 जब भाजक आधार संख्या से छोटा है

उदाहरण 18 30112 ÷ 9 को हल कीजिए।

भाजक	9	3	0	1	1	2
आधार	10	↓	3	—	—	—
विचलन	$\bar{1}$	↓	↓	3	—	—
संशोधन गुणांक	1	↓	↓	↓	4	5
		3	3	4	5	7 (शेषफल)

भागफल = 3345 (क्रियाविधि पूर्व की भाँति)

शेषफल = 7

उदाहरण 19 11022 ÷ 89

भाजक = 89 जो कि आधार 100 के नजदीक

अतः तृतीय खण्ड में भाज्य से दो अंक 2 2 लिखेंगे।

भाजक	89	1	1	0	2	2
आधार	100	↓	1	1	—	—
विचलन	$\bar{1}$ $\bar{1}$	↓	↓	2	2	—
संशोधन	1 1	↓	↓	↓	3	3
गुणांक		1	2	3	7	5

भागफल = 123

शेषफल = 75

क्रिया की विधि पूर्व की भाँति

प्रश्नावली 9.4

1. विलोकनम् विधि से वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

   (i) 169 (ii) 576 (iii) 2025 (iv) 9025 (v) 441

2. सूत्र परावर्त्ययोजयेत से भाग संक्रिया कीजिए।

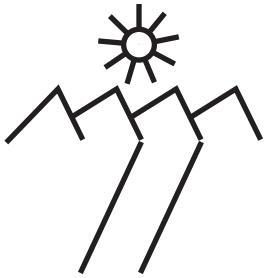
   (i) 23244 ÷ 4 (ii) 2112 ÷ 9

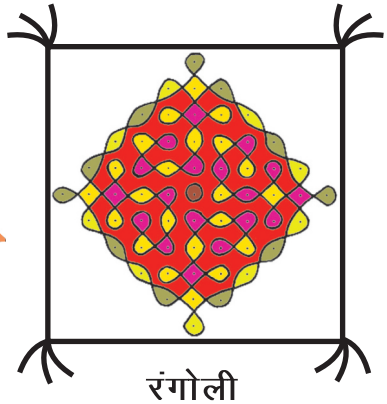
   (iii) 1234 ÷ 112 (iv) 10321 ÷ 98

अध्याय 10

आधारभूत ज्यॉमिति अवधारणाएँ व रचनाएँ

10.1 हम सभी अपने चारों ओर कई चित्र एवं आकृतियाँ देखते है –





रंगोली

मेहन्दी

इनमें हमें कई आकृतियाँ गोल, चोकोर, त्रिकोण, सीधी रेखा, वक्र रेखा आदि दिखाई देती है यह आकृतियाँ ज्यामितीय आकृतियाँ कहलाती हैं। इस अध्याय में हम विभिन्न ज्यामितीय आकृतियों के बारे में अध्ययन करेंगे।

10.2 बिन्दु कागज पर पेंसिल के नुकीले सिरे से एक चिन्ह अंकित करो।

परकार का नुकीला सिरा

पेन्सिल का नुकीला सिरा

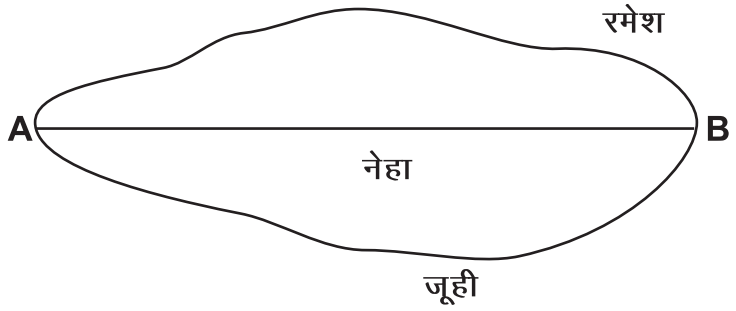
आलपिन का नुकीला सिरा

परकार, पेन्सिल, आलपिन के सिरे से यदि चिह्न अंकित करें तो वह सूक्ष्म चिन्ह बनाएगा इस प्रकार लगभग ना दिखाई देने वाला चिन्ह हमें बिन्दु का आभास करवाता है। बिन्दु का कोई माप नहीं होता यह केवल एक स्थिति को निर्धारित करता है।

यदि एक कागज पर अलग–अलग बिन्दु बनाए जाए तो उनमें भेद करने के लिए उन्हें हिन्दी अथवा अंग्रेजी वर्णमाला के नाम दे सकते हैं।

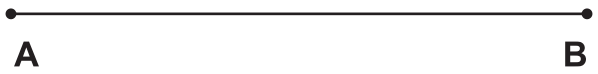
10.3 रेखाखण्ड

कक्षा 6 में बच्चों ने श्यामपट्ट पर दो बिन्दु A व B को निम्न प्रकार से मिलाया।



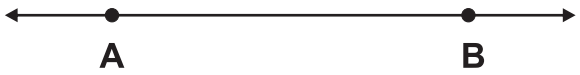
क्या आप बता सकते है तीनों में से सबसे कम लम्बाई से A व B को किसने मिलाया ?

सही बताया नेहा ने सबसे कम लम्बाई से A व B को मिलाया। दो बिन्दुओं के बीच की सीधी दूरी (न्यूनतम दूरी) ही रेखा खण्ड कहलाती है।



इस रेखाखण्ड को AB रेखाखण्ड अर्थात् प्रारम्भिक बिन्दु व अंतिम बिन्दु के नाम से बोलते है।

10.4 रेखा

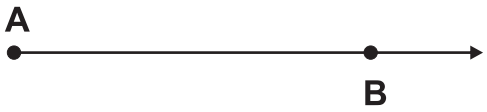


कल्पना करें कि यदि रेखाखण्ड AB को क्रमश A तथा B से दोनों ओर अनन्त लम्बाई तक बढ़ाते रहें तो क्या होगा ?

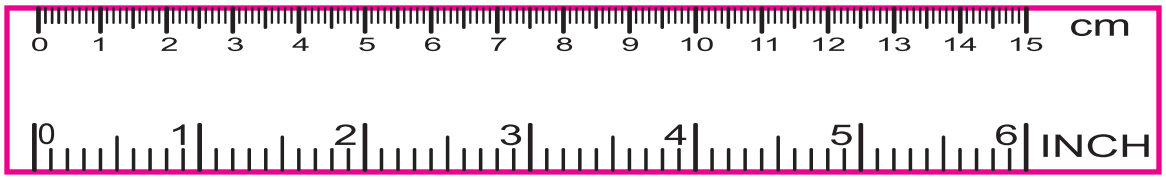
इस स्थिति में हम दोनों ओर तीर का निशान लगाकर अनन्त लम्बाई को प्रदर्शित करते हैं तथा यह रेखा AB कहलाती है।

10.5 किरण

जब किसी बिन्दु से एक ही दिशा में अनन्त लम्बाई की रेखा खींची जाए तो वह किरण कहलाती है अर्थात् इसका प्रारम्भिक बिन्दु तो होता है परन्तु अन्तिम बिन्दु नहीं होगा।

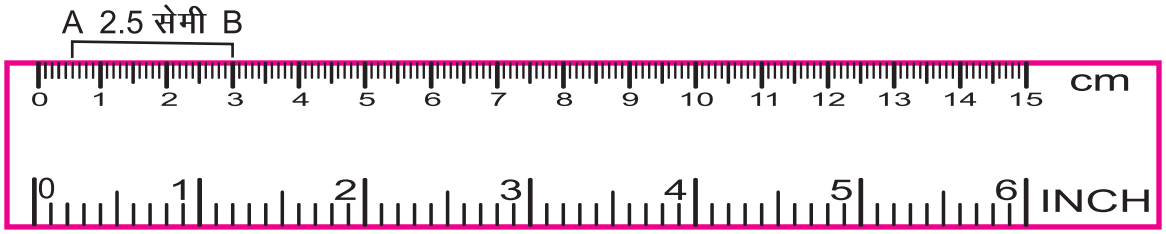


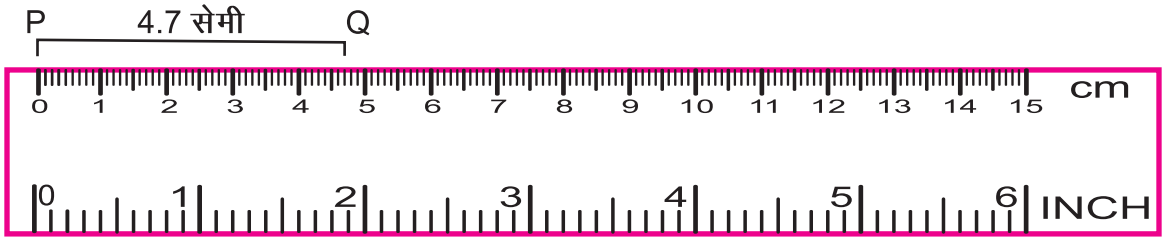
10.6 स्केल (पटरी) का परिचय



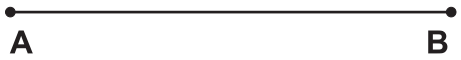
ऊपर स्केल (पटरी) का चित्र दिया गया है इसमें ऊपर की ओर सेन्टीमीटर तथा नीचे की ओर इन्च में माप दिया गया है।

सेन्टीमीटर के मध्य पुनः 10 छोटे भाग होते हैं, इन्हें मिली मीटर (मिली. मी) कहते है।

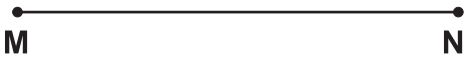




ऊपर दिए चित्रों में रेखाखण्ड AB = 2.5 सेमी तथा PQ = 4.7 सेमी नाप कर दिखाया गया है। आप भी दी गई रेखाखण्डों को माप कर उसका माप लिखिए।



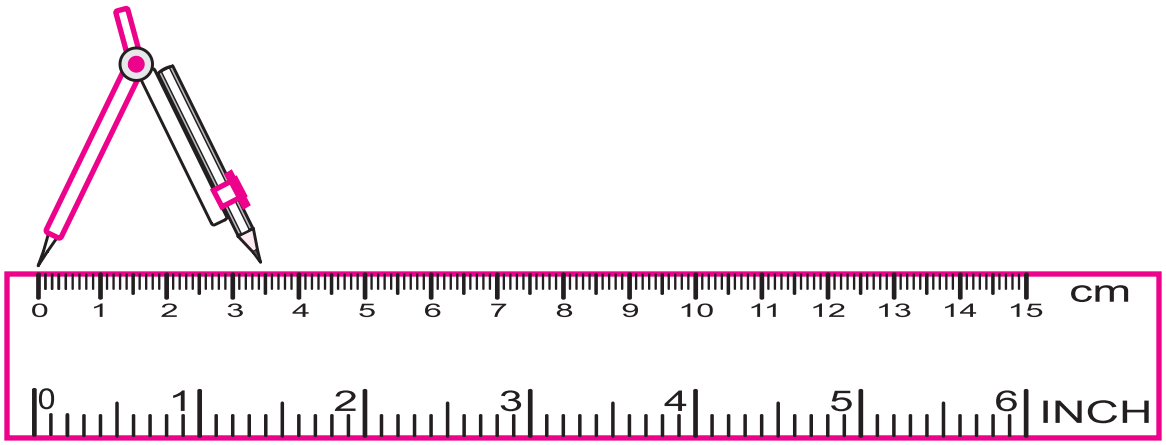
———————— सेमी



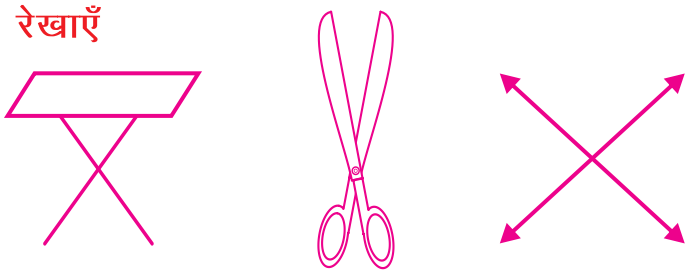
———————— सेमी

डिवाईडर की सहायता से रेखाखण्ड का मापन

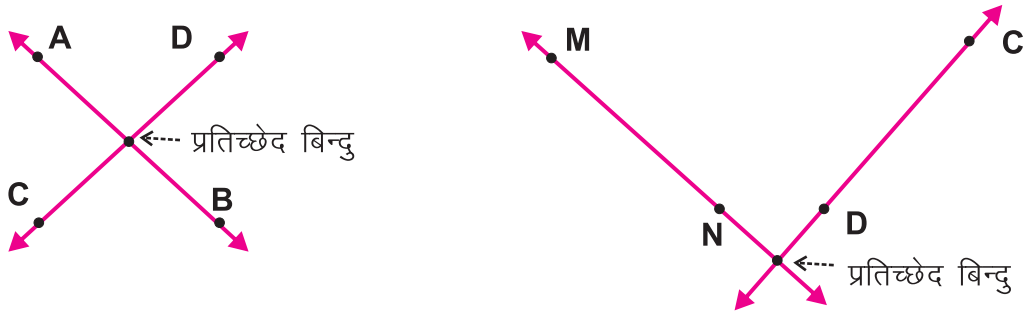
डिवाईडर को प्रारम्भिक बिन्दु से अन्तिम बिन्दु तक खोल ले। अब स्केल पर प्रारम्भिक बिन्दु की नोक को शून्य पर रखकर नाप ले।



10.7 प्रतिच्छेदी रेखाएँ



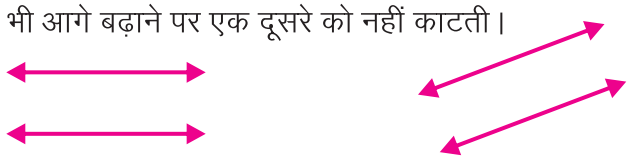
ऊपर दिए गए चित्रों में हम देखते हैं कि इसमें प्रदर्शित रेखाएँ एक दूसरे को प्रतिच्छेद कर रही है। ऐसी रेखाएँ जो एक दूसरे को किसी बिन्दु पर काटती है अर्थात् प्रतिच्छेद करती है वह रेखाएँ प्रतिच्छेदी रेखाएँ कहलाती हैं तथा वह बिन्दु प्रतिच्छेद बिन्दु कहलाता है।



यद्यपि रेखा MN तथा CD प्रतिच्छेद करती नहीं दिखाई दे रही परन्तु ये आगे बढ़ाने पर आपस में प्रतिच्छेद करेंगी अतः यह प्रतिच्छेदी रेखाएँ कहलाएगी।

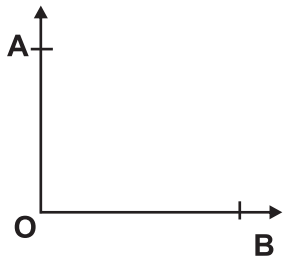
10.8 समान्तर रेखाएँ

ऐसी रेखाएँ जिनके बीच की दूरी सदैव समान रहती है वे समान्तर रेखाएँ कहलाती हैं। ये कितना भी आगे बढ़ाने पर एक दूसरे को नहीं काटती।

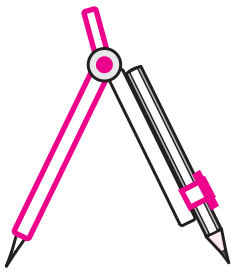


10.9 लम्बवत रेखाएँ

जब दो रेखाएँ परस्पर समकोण पर मिलती है तब हम कहेंगे कि रेखाएँ परस्पर लम्बवत है। इसे OA ⊥ OB से प्रदर्शित करते हैं।



आप भी अपने चारों ओर ऐसे उदाहरण देखो और ढूढ़ो कि कहाँ–कहाँ समकोण अर्थात् लम्बवत रेखाएँ मिलती है ?



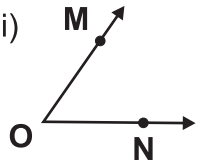
परकार –

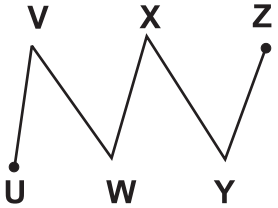
परकार में दो सिरे होते हैं। एक सिरा नुकीला और दूसरे सिरे में पेन्सिल लगाने का स्थान होता है। इसका उपयोग वृत खींचने एवं चाप काटने में होता है। बराबर लम्बाइयाँ अंकित करने में भी इसका उपयोग होता है।

प्रश्नावली 10

1. दिए गए चित्रों में रेखाखंडों के नाम लिखिए।

(i)

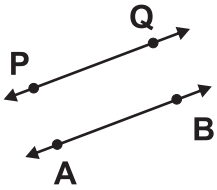
(ii) 

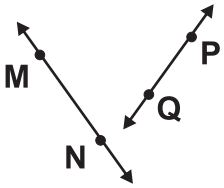
(iii) 

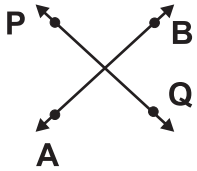
2. स्केल का प्रयोग कर निम्न लम्बाई के रेखाखंड खींचिए।

(i) 4.0 सेमी (ii) 5.4 सेमी (ii) 3.7 सेमी

3. निम्न मे से प्रतिच्छेदी व समान्तर रेखाओं के युग्म छाँटिए।

(i) 

(ii) 

(iii) 

अध्याय 11

कोण एवं रेखाएँ

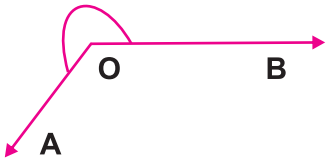
11.1 हम जानते है कि समकोण 90^0 के कोण को कहते हैं एवं समकोण से छोटा कोण न्यून कोण व समकोण से बड़े व दो समकोण से छोटे कोण को अधिक कोण कहते हैं।

(i) (ii) (iii)

यहाँ (i) न्यून कोण (ii) अधिक कोण व (iii) समकोण का चित्र है।

सरल कोण– 180^0 का कोण सरल कोण कहलाता है

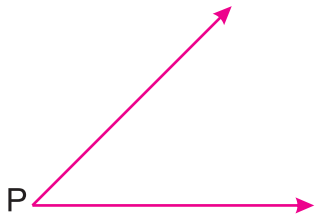
वृहत कोण – 180^0 से बड़े एवं 360^0 से छोटे कोण को वृहत या प्रतिवर्ती कोण कहते है।



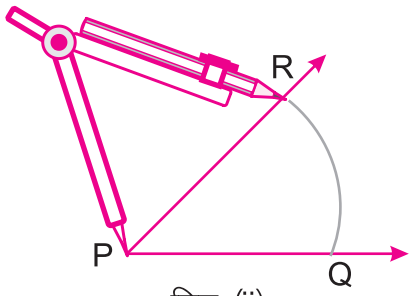
11.1.1 परकार की सहायता से दिए गए कोण का समद्विभाजन

चित्र (i) में ∠P दिया है।

चरण 1 बिन्दु P को केन्द्र मानकर परकार की सहायता से एक चाप लगाए जो कोण P की भुजाओं को Q व R पर काटे । चित्र (ii)



चित्र (i)

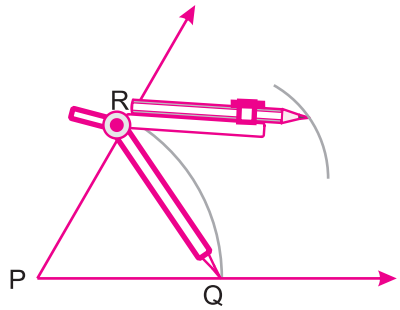


चित्र (ii)

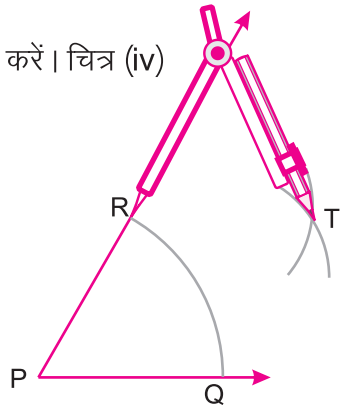
चरण 2 Q को केन्द्र मानकर परकार के उसी फैलाव की त्रिज्या लेकर एक चाप कोण P के फैलाव क्षेत्र (अभ्यन्तर) में लगाएँ। चित्र (iii)

चरण 3 इसी प्रकार R को केन्द्र मानकर परकार के उसी फैलाव की त्रिज्या लेकर एक चाप लगाए जो पूर्व में लगाए चाप को काटे।

दोनों चाप के प्रतिच्छेद बिन्दु को T से प्रदर्शित करें। चित्र (iv)

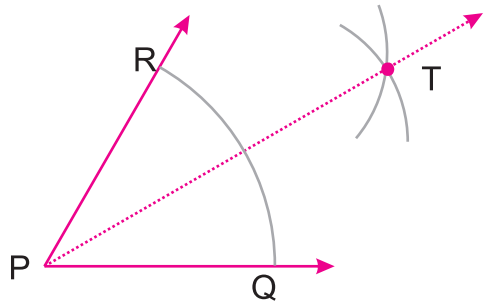


चित्र (iii)



चित्र (iv)

चरण 4 T व P को मिलाने पर कोण P का समद्विभाजक TP प्राप्त होता है। चित्र (v)



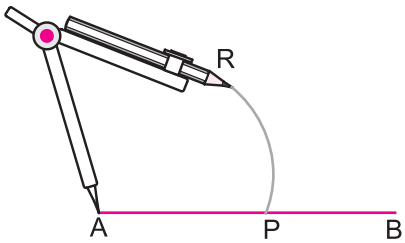
चित्र (v)

11.1.2 परकार की सहायता से कोण की रचना

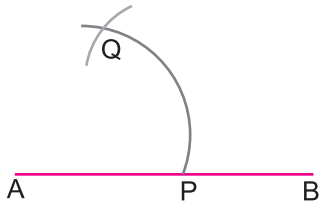
(i) 60°, 120°, व 180° की रचना करना।

(A) 60° के कोण की रचना।

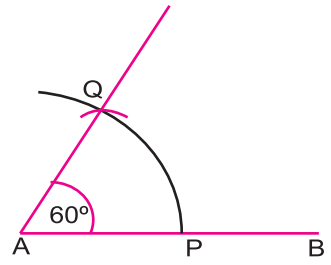
चरण 1 एक रेखाखण्ड AB खींचिए। उपयुक्त त्रिज्या का नाप लेकर परकार के नुकीले सिरे को बिन्दु A पर रखकर एक चाप खींचिए। जो रेखाखण्ड AB को बिन्दु P पर काटता है।

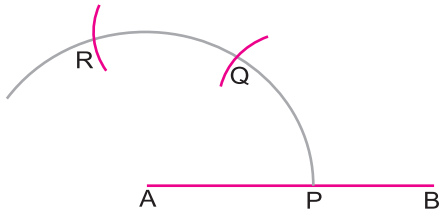


चरण 2 बिंदु P पर नुकीले सिरे को रखकर उसी त्रिज्या के माप का चाप पूर्व चाप पर बनाए। दोनों चापों के प्रतिच्छेद बिंदु को Q अंकित करें।



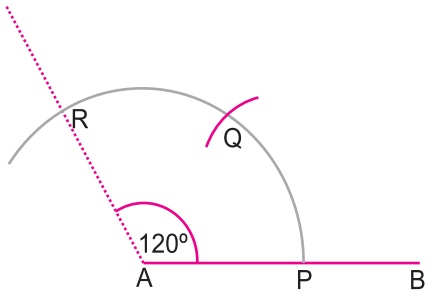
चरण 3 AQ को मिलाने पर $\angle QAB = 60^\circ$ बनता है।





(B) 120° के कोण की रचना

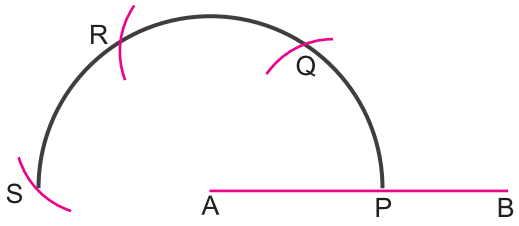
चरण 1 ऊपर के चित्र पर आगे की क्रिया करते हुए उसी त्रिज्या का चाप लेकर परकार के नुकीले सिरे को Q पर रखकर एक ओर चाप काटे जो पूर्व में लगाए चाप को बिंदु R पर काटता है।



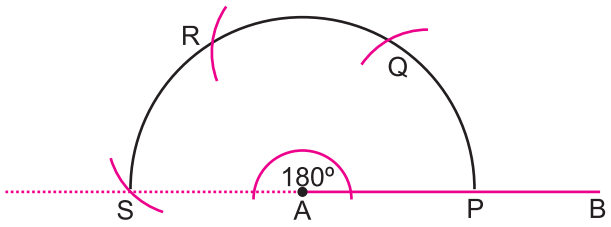
चरण 2 AR को मिलाने पर $\angle RAB = 120^\circ$ प्राप्त होता है।

(C) 180° को कोण की रचना

चरण 1 ऊपर के चित्र पर आगे की क्रिया करते हुए उसी त्रिज्या का चाप लेकर परकार के नुकीले सिरे को R पर रखकर एक चाप और काटे जो पूर्व में लगाए चाप को S पर काटता है।



चरण 2 SA को मिलाने पर $\angle SAB = 180^\circ$ प्राप्त होता है।

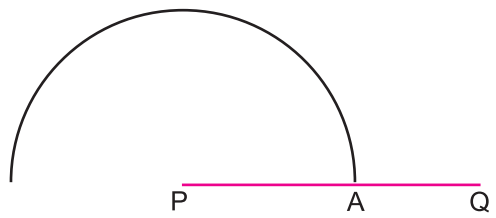


11.1.2 (ii) 30°, 45°, 90° के कोण की रचना

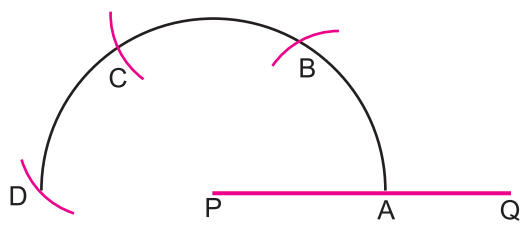
ऊपर 60°, 120°, 180° के कोण की रचना के आधार पर 60° के समद्विभाजन से 30°, 60° और 120° के बीच के कोण का समद्विभाजन से 90° तथा 30° और 60° के बीच कोण का समद्विभाजन करने से 45° के कोण की रचना की जा सकती है।

(A) 30° के कोण की रचना

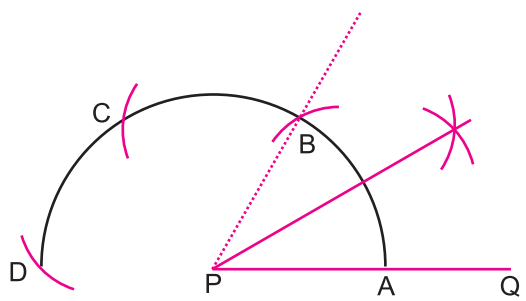
चरण 1 रेखाखण्ड PQ खींचिए उपयुक्त त्रिज्या का चाप लेकर परकार के नुकीले सिरे को P पर रखकर एक चाप खींचिए।



चरण 2 उसी त्रिज्या का चाप लेकर परकार के नुकीले सिरे को बिंदु A, B और C पर रखकर चाप काटिए जो पूर्व में बनाए चाप को बिंदु B, C, D पर काटता है।



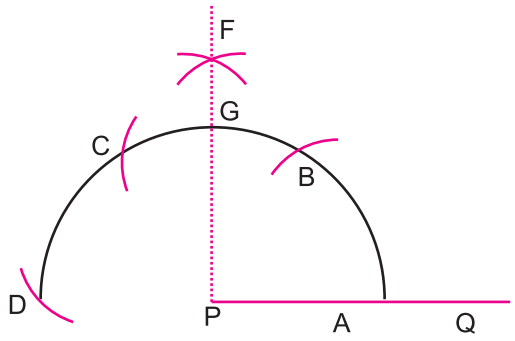
चरण 3 PB को मिलाने पर $\angle BPA = 60^\circ$ प्राप्त होता है इसका समद्विभाजन करने पर 30° का कोण प्राप्त होता है।



(B) 90° के कोण की रचना

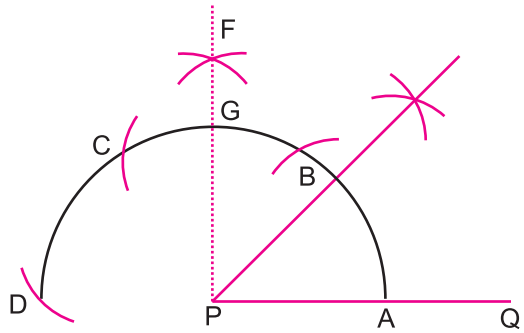
इसी प्रकार कोण $\angle BPC$ का समद्विभाजन करने पर 90° का कोण प्राप्त होता है कोण $\angle FPQ = 90^\circ$ ।

180° का अर्द्धक करने पर भी 90° प्राप्त कर सकते हैं।



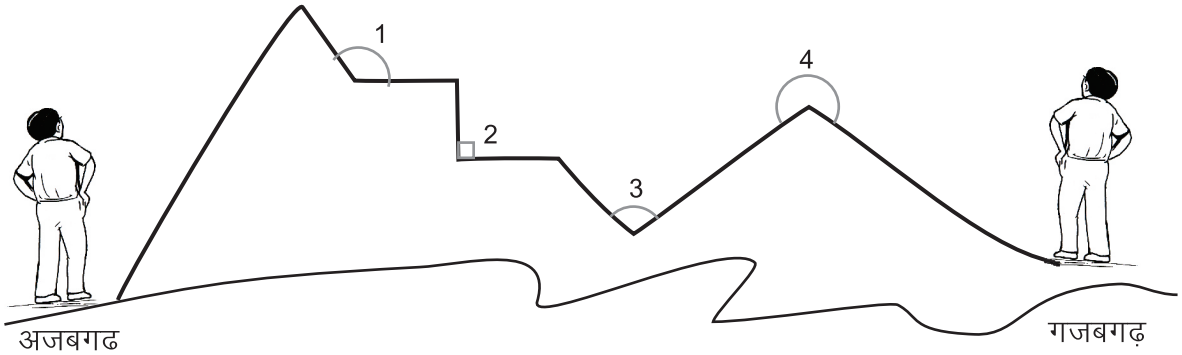
(C) 45° के कोण की रचना

90° के कोण के समद्विभाजन द्वारा 45° के कोण की रचना करते है।



प्रश्नावली 11.1

1. गाँव अजबगढ़ से गजबगढ़ के बीच का रास्ता निम्न रूप से बना है। बनने वाले कोण $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ का नाम लिखिए।



2. चाँदे की सहायता से निम्नलिखित नाप के कोण बनाइए।

(i) 45° (ii) 20° (iii) 134° (iv) 105°

3. परकार व रूलर की सहायता से निम्न कोण बनाइए।

(i) 60° (ii) 180° (iii) 90° (iv) 45°

11.2.1 पूरक कोण जब दो कोणों का योग 90° के बराबर होता है तो वह परस्पर पूरक कोण कहलाते हैं। जैसे – 30° का पूरक कोण क्या होगा ?

$30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$

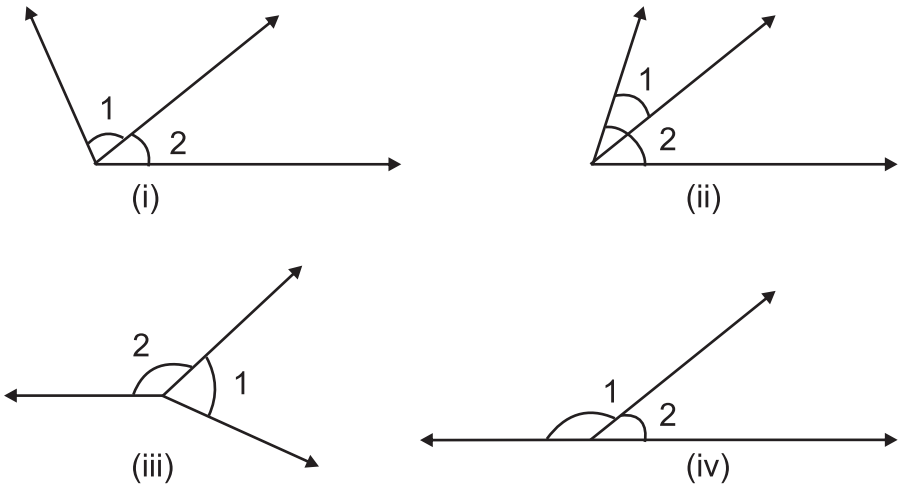
अतः 30° का पूरक 60° होता है।

11.2.2 संपूरक कोण जब दो कोणों का योग 180° होता है तो ये कोण एक दूसरे के संपूरक कोण कहलाते हैं। जैसे – 125° का संपूरक कोण क्या होगा?

125° का संपूरक कोण 55° होगा क्योंकि

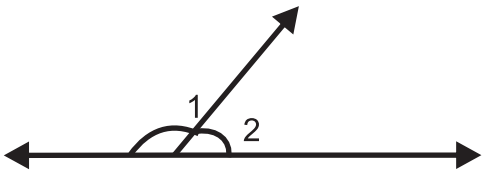
$125^\circ + 55^\circ = 180^\circ$

11.2.3 आसन्न कोण आसन्न कोणों में एक उभयनिष्ठ शीर्ष तथा एक उभयनिष्ठ भुजा होती है तथा दोनों कोण उभयनिष्ठ भुजा के एक ही ओर न होकर विपरीत ओर होते हैं।



चित्र में (i), (iii) व (iv) आसन्न कोण हैं परन्तु (ii) में आसन्न कोण नहीं है क्योंकि उभयनिष्ठ शीर्ष तो एक है लेकिन उभयनिष्ठ भुजा बीच में नहीं है।

11.2.4 रैखिक कोण युग्म् ऐसे आसन्न कोण जिसमें उभयनिष्ठ भुजा के दोनों तरफ बने कोणों का योग 180° होता है, रैखिक कोण युग्म कहलाते हैं। ये कोण सम्पूरक भी होते हैं।

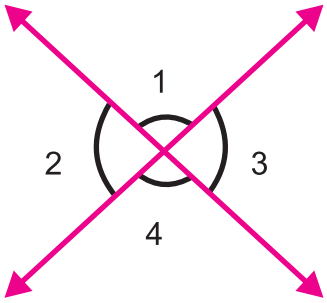


11.2.5 शीर्षाभिमुख कोण

दो रेखाओं के किसी बिन्दु पर काटने से निर्मित कोण शीर्षाभिमुख कोण कहलाते हैं अर्थात् वे कोण जिनके शीर्ष एक हो व मुख विपरित दिशा में हो। चित्र में $\angle 1$ तथा $\angle 4$, $\angle 2$ तथा $\angle 3$ शीर्षाभिमुख कोण है।

साथ ही $\angle 1 = \angle 4$

तथा $\angle 2 = \angle 3$



प्रश्नावली 11.2

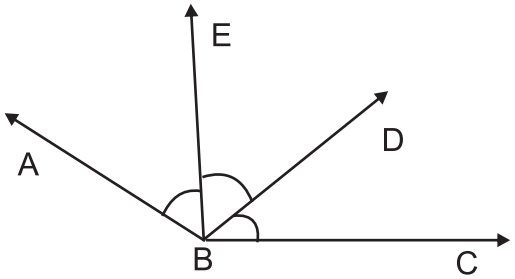
1. कोणों के निम्नलिखित जोड़ों में से पूरक और संपूरक जोड़ो को अलग–अलग लिखिए।

   (i) $140^\circ, 40^\circ$ (ii) $25^\circ, 65^\circ$ (iii) $75^\circ, 15^\circ$

   (iv) $170^\circ, 10^\circ$ (v) $115^\circ, 65^\circ$

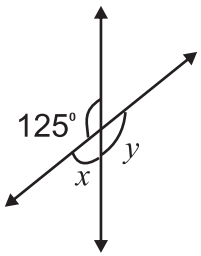
2. एक समकोण के सम्पूरक कोण का मान ज्ञात कीजिए।

3. चित्र में आसन्न कोणों के युग्म लिखिए।

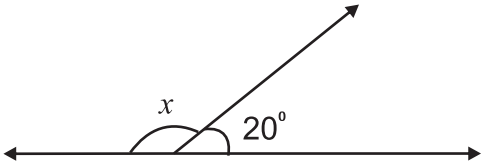


4. अज्ञात कोणों के मान ज्ञात कीजिए।

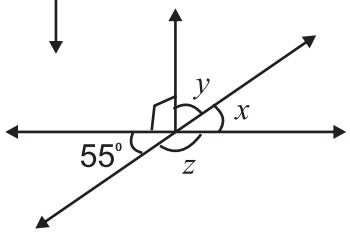
(i)



(ii)

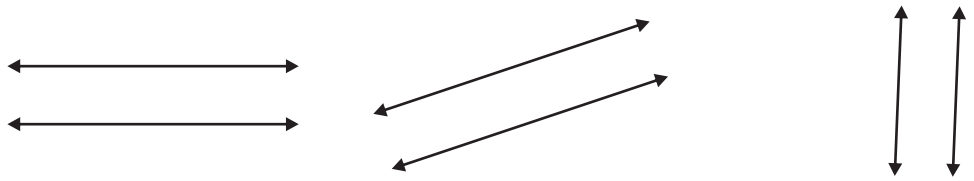


(iii)

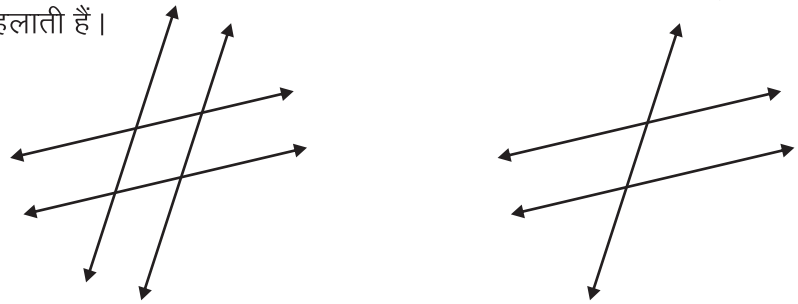


11.3 रेखा युग्म

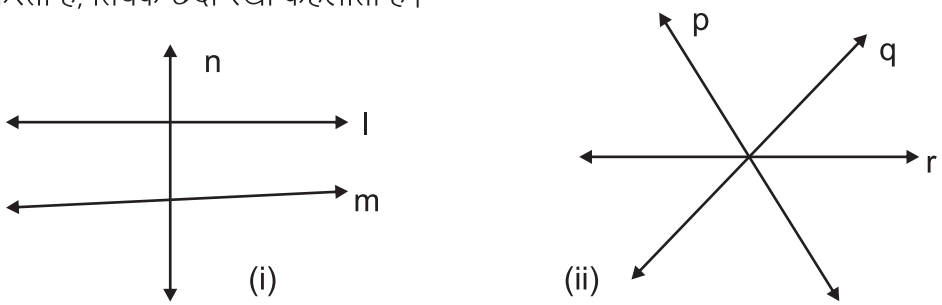
(1) समान्तर रेखाएँ दो समतलीय रेखाएँ जो एक दूसरे को नहीं काटती है अर्थात् इनके बीच की लम्बवत दूरी सदैव समान रहती है। समान्तर रेखाएँ कहलाती हैं।



(2) प्रतिच्छेदी रेखाएँ ऐसी रेखाएँ जो समान्तर नहीं होती है अर्थात् एक दूसरे को काटती है, प्रतिच्छेदी रेखाएँ कहलाती हैं।

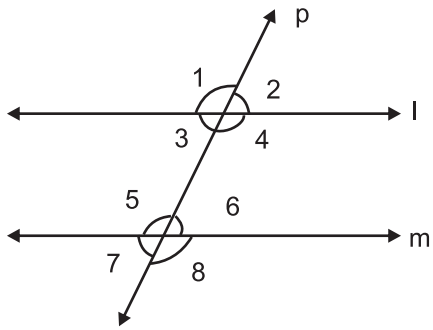


(3) तिर्यक छेदी रेखाएँ एक ऐसी रेखा जो दो या दो से अधिक रेखाओं को भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है, तिर्यक छेदी रेखा कहलाती है।



चित्र (i) में l व m को तिर्यकछेदी रेखा n दो अलग–अलग बिन्दुओं पर काटती है। चित्र (ii) में सभी रेखाएँ एक ही बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं, अतः यह तिर्यक छेदी रेखा का उदाहरण नहीं है।

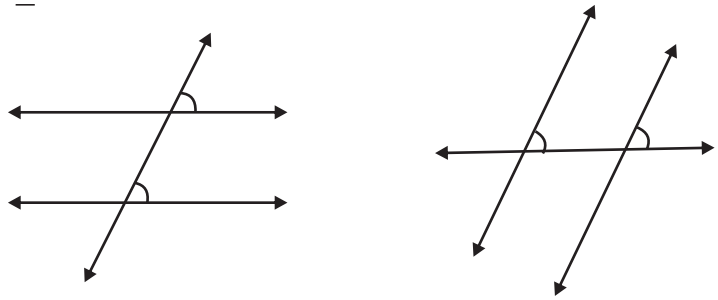
11.3.1 तिर्यक छेदी रेखा द्वारा बनने वाले कोण – दो रेखाएँ l व m को तिर्यक छेदी रेखा p काटती है तो 8 भिन्न कोण बनते हैं। इन्हें सारणी द्वारा समझ सकते हैं।



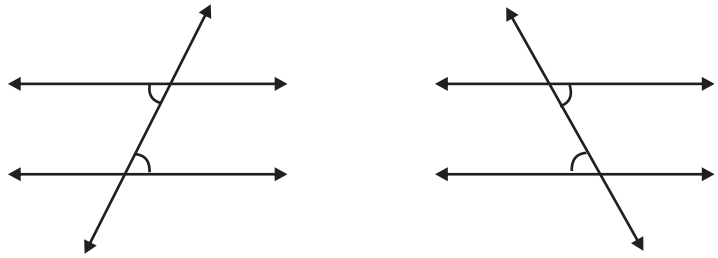
संगत कोण युग्म	$\angle 1$ व $\angle 5$, $\angle 2$ व $\angle 6$, $\angle 3$ व $\angle 7$, $\angle 4$ व $\angle 8$
एकान्तर अन्तः कोण युग्म	$\angle 3$ व $\angle 6$, $\angle 4$ व $\angle 5$
एकान्तर बाह्य कोण युग्म	$\angle 1$ व $\angle 8$, $\angle 2$ व $\angle 7$
तिर्यकछेदी रेखा के एक ही ओर बने अन्तः कोण युग्म	$\angle 3$ व $\angle 5$, $\angle 4$ व $\angle 6$
तिर्यक छेदी रेखा के एक ही ओर बने बाह्य कोण युग्म	$\angle 1$ व $\angle 7$, $\angle 2$ व $\angle 8$

संगत कोण में F आकार व एकान्तर कोण में Z आकृति बनती है।

जैसे –



ये संगत कोण हैं।



ये एकान्तर कोण हैं।

(i) यदि दो समान्तर रेखाओं को एक तिर्यकछेदी रेखा काटती है तो बनने वाले एकान्तर कोण आपस में बराबर होंगे।

(ii) दो समान्तर रेखाएँ किसी एक तिर्यकछेदी रेखा द्वारा काटी जाती है तो तिर्यकछेदी रेखा के एक ही ओर बने अन्तः कोणों का प्रत्येक युग्म संपूरक होता है।

प्रश्नावली 11.3

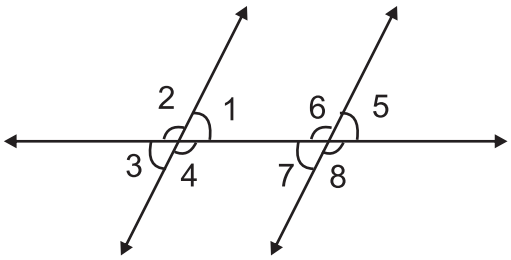
1. दिए गए चित्र में बताइए।

   (i) अन्तः एकान्तर कोणों के नाम

   (ii) बाह्य एकान्तर कोणों के नाम

   (iii) संगत कोणों के नाम

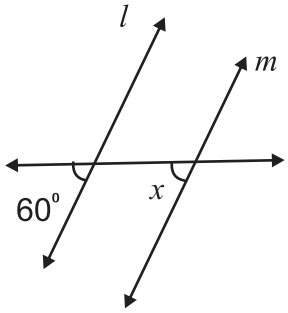
   (iv) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अन्तः कोणों का नाम



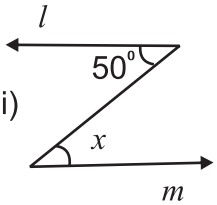
2. एक रेखा PQ खींचिए और इसके समान्तर रेखा RS खींचिए।

3. यदि l ll m हो तो x का मान बताइए।

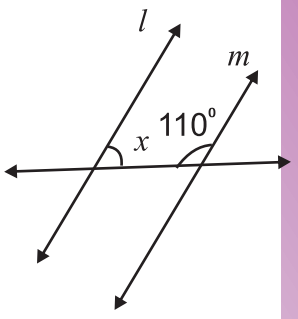
(i)



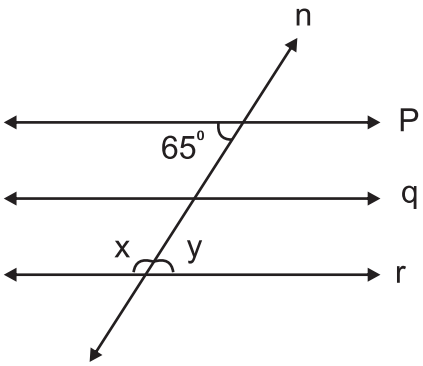
(ii)



(iii)



4. यदि p ll q तथा q ll r हो तो x तथा y का मान ज्ञात कीजिए।



अध्याय 12

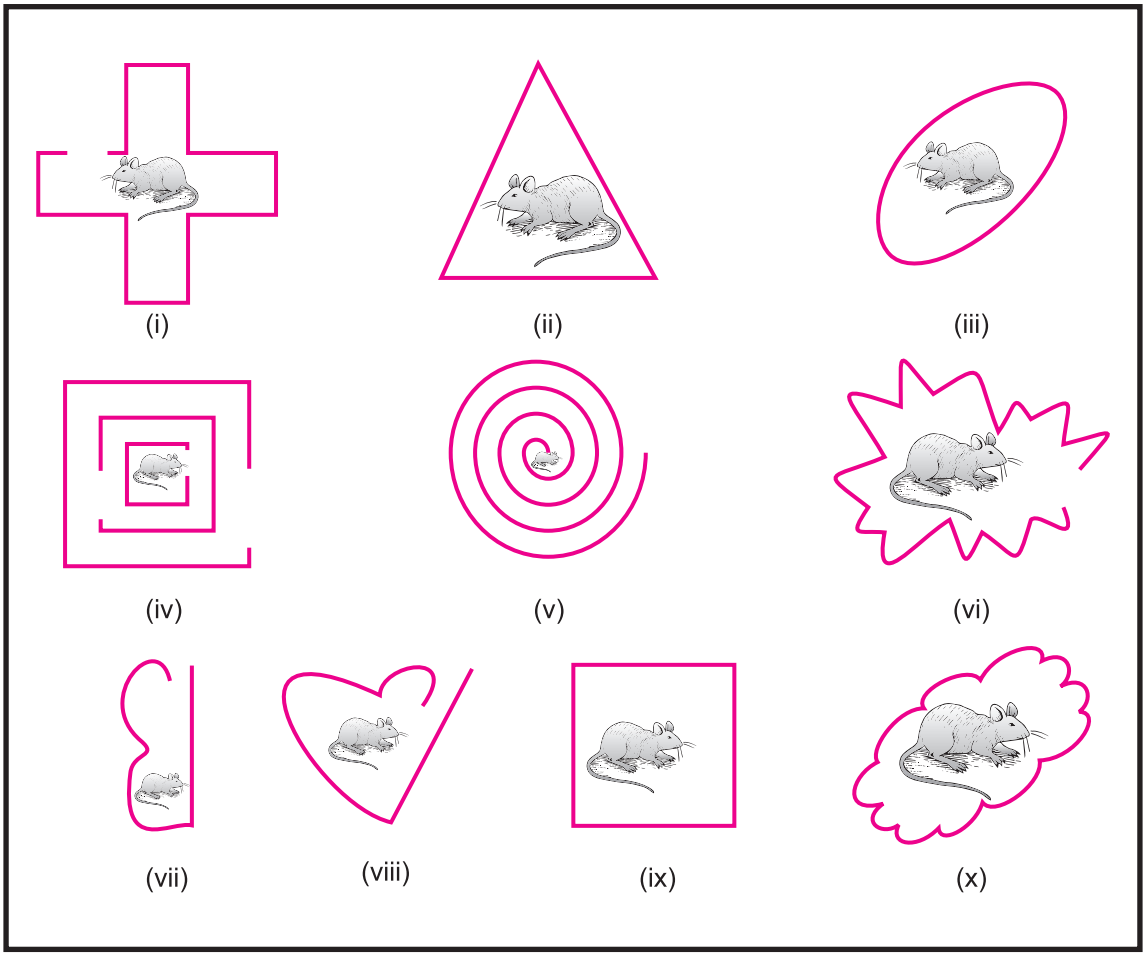
सरल द्विविमीय आकृतियाँ

12.1 हम अपने चारों ओर कई वस्तुएँ देखते हैं उनमें से कुछ वस्तुओं के पृष्ठ समतल एवं कुछ के पृष्ठ असमतल होते हैं।

हम इस अध्याय में कुछ समतलीय आकृतियों के बारे में अध्याय करेंगे।

12.2 खुली एवं बन्द आकृतियाँ

नीचे प्रत्येक आकृति में एक चूहा है। आपको पता लगाना है कि कौन–कौनसी आकृतियों में से चूहा बाहर निकल सकता है?



आकृति (ii), (iii), (ix) व (x) में चूहा बाहर नहीं निकल सकता है। अतः ये बन्द आकृतियाँ हैं।

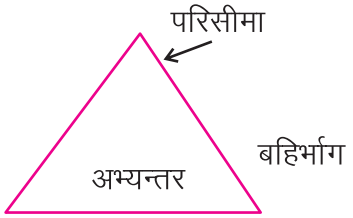
वे आकृतियाँ जो अपने प्रारम्भिक बिन्दु पर समाप्त होती हैं, तथा रेखा के किसी बिन्दु को दो बार न काटे बंद आकृतियाँ कहलाती हैं और जो आकृतियाँ प्रारम्भिक बिन्दु पर समाप्त नहीं होती वह खुली आकृतियाँ कहलाती हैं।

एक बन्द आकृति से सम्बन्धित तीन भाग होते हैं –

(1) अभ्यन्तर (अन्दर का भाग)

(2) बहिर्भाग (बाहरी भाग)

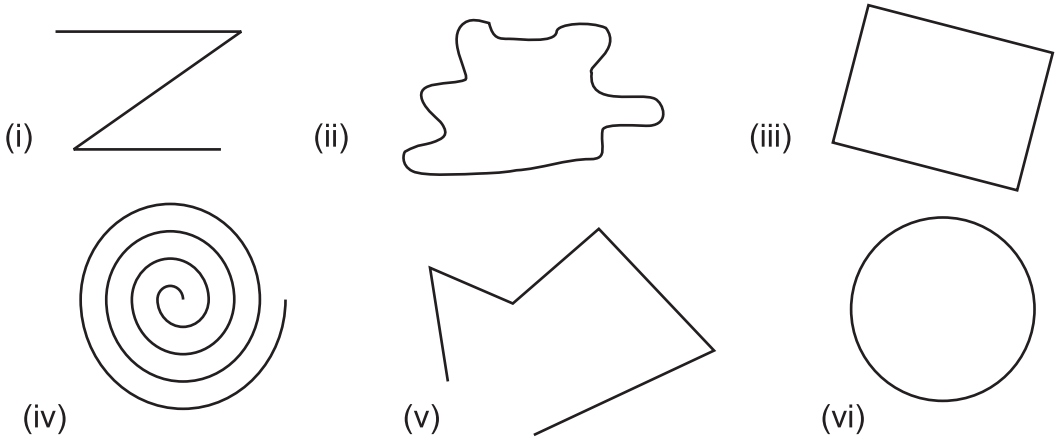
(3) परिसीमा



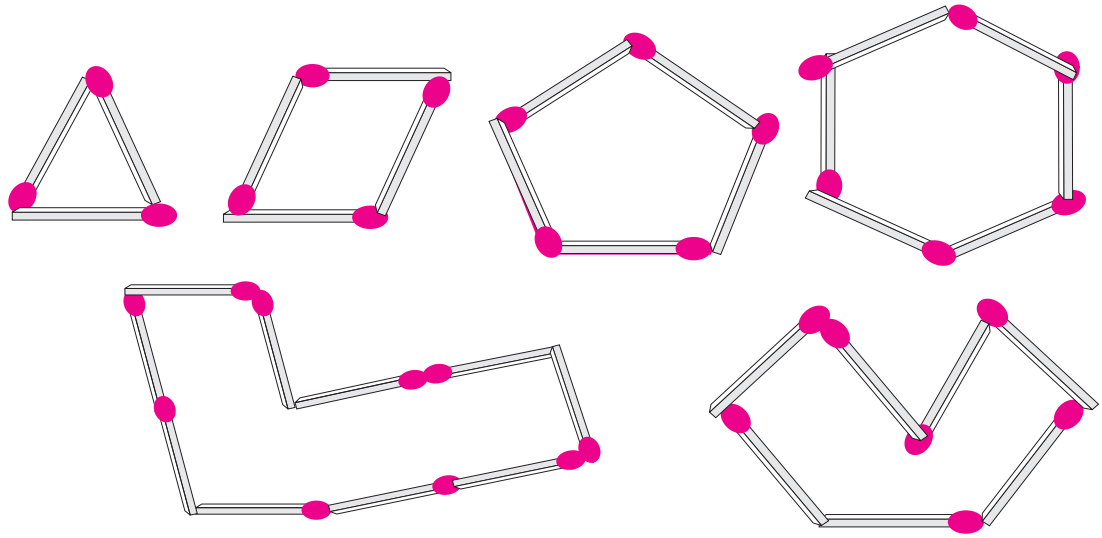
प्रश्नावली 12.1

1. तीन खुली एवं तीन बन्द आकृतियाँ बनाइए।
2. कौन–कौन से बिन्दु आयत के अभ्यन्तर में हैं तथा कौन से बिन्दु बहिर्भाग में हैं।

3. नीचे दी गई आकृतियों में बन्द एवं खुली आकृतियाँ छाँटिए।



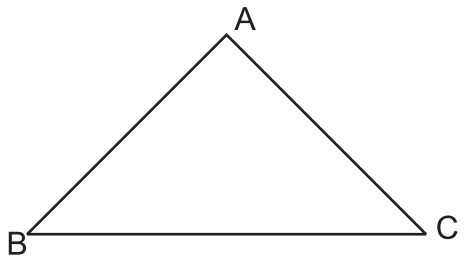
12.3 बहुभुज माचिस की तीलियों को कार्डशीट पर चिपकाकर कुछ आकृतियाँ निम्न प्रकार बनाइए।



हम देखते हैं कि किसी भी बन्द आकृति (बहुभुज) को बनाने के लिए कम से कम तीन तीलियों की आवश्यकता होती है।

इस प्रकार की बन्द आकृतियाँ जो तीन या तीन से अधिक भुजाओं द्वारा निर्मित हो उन्हें बहुभुज कहते हैं।

12.3.1 त्रिभुज तीन भुजाओं वाली बन्द आकृति को त्रिभुज कहते हैं।
त्रिभुज सबसे कम भुजाओं वाला बहुभुज होता है।

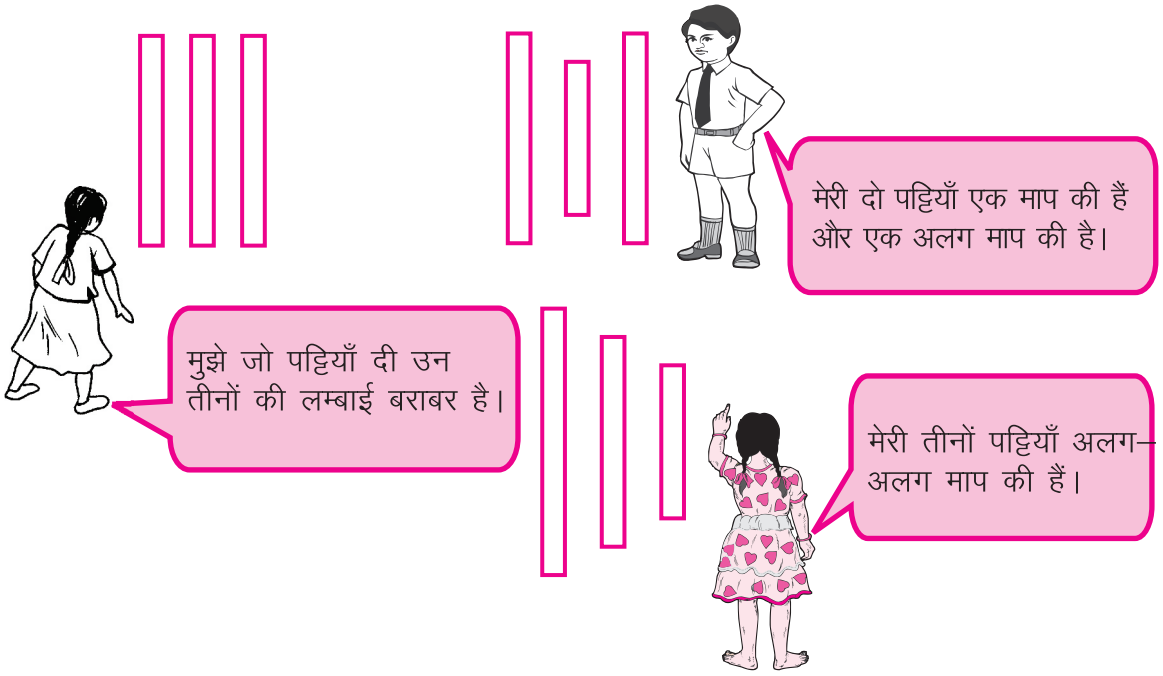


दिए गए त्रिभुज में क्रमशः तीन भुजाएँ AB, BC एवं AC हैं तथा तीन कोण ∠ABC, ∠BCA व ∠CAB है। A, B तथा C त्रिभुज के तीन शीर्ष कहलाते हैं।

12.4 त्रिभुजों के प्रकार

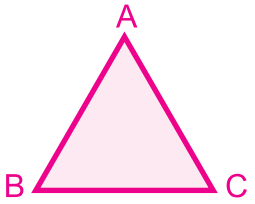
12.4.1 भुजाओं के आधार पर

शिक्षक ने तीन बच्चों को विभिन्न मापों की तीन–तीन बाँस की पट्टियाँ दी और बन्द आकृति (त्रिभुज) बनाने को कहा।

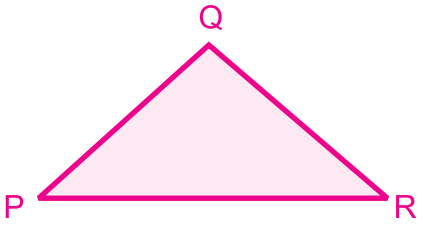


जिस त्रिभुज की तीनों भुजाएँ बराबर हो उसे **समबाहु** त्रिभुज कहते हैं।

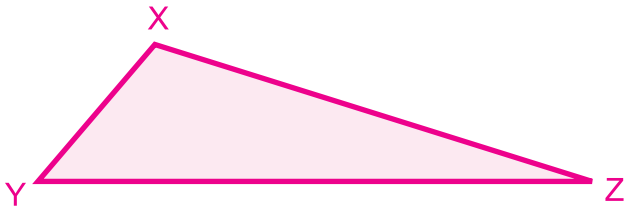
आकृति में AB = BC = CA



जिस त्रिभुज की दो भुजाएँ समान हो व एक भुजा अलग हो उसे समद्विबाहु त्रिभुज कहते हैं। इस त्रिभुज में $PQ = QR \neq PR$



जिस त्रिभुज की तीनों भुजाएँ असमान हो उसे विषमबाहु त्रिभुज कहते हैं। इस आकृति में $XY \neq YZ \neq ZX$



एक कार्ड शीट पर केवल माचिस की तीलियों को चिपका कर समबाहु, समद्विबाहु व विषमबाहु त्रिभुज बनाइए।

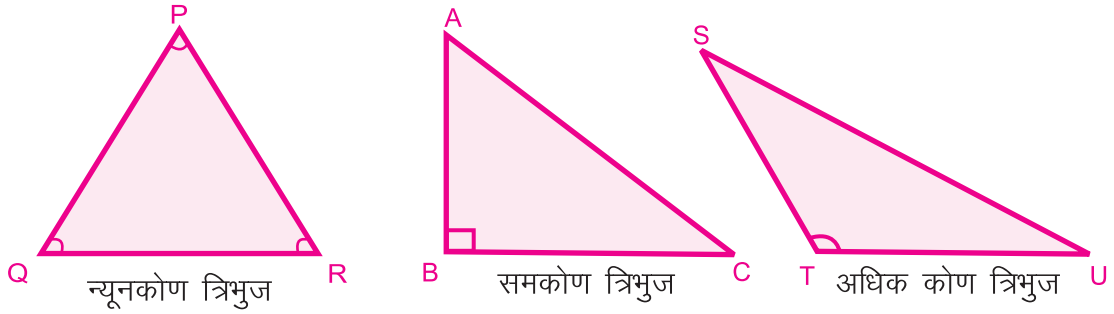
12.4.2 कोणों के आधार पर

कक्षा में विद्यार्थियों ने आज कागज से अलग–अलग प्रकार की त्रिभुजाकार आकृतियाँ बनाई।

(i) वह त्रिभुज जिसके तीनों कोण न्यूनकोण हो वह **न्यूनकोण त्रिभुज** कहलाता है।

(ii) वह त्रिभुज जिसमें एक कोण समकोण हो वह **समकोण त्रिभुज** कहलाता है।

(iii) वह त्रिभुज जिसमें एक कोण अधिक कोण हो वह **अधिक कोण त्रिभुज** कहलाता है।

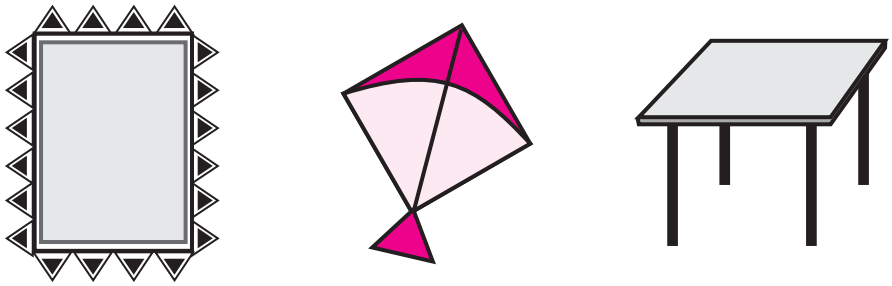


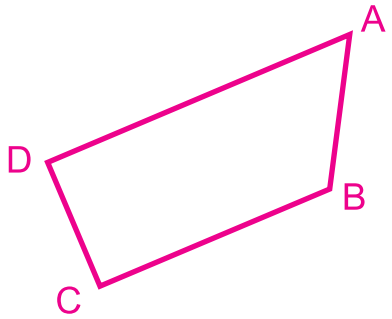
1. किसी त्रिभुज की तीनों भुजाएँ समान है तो क्या सभी कोण न्यूनकोण होंगे ?
2. विषमबाहु त्रिभुज का चित्र बनाकर उसके कोणों का माप लिखिए ?
3. क्या ऐसा त्रिभुज बनाया जा सकता है जिसमें दो समकोण हो ? यदि हाँ तो बनाइए। यदि नहीं तो कारण बताएँ।

12.5 चतुर्भज एवं उसके अवयव

ऐसे सभी बहुभुज आकृतियाँ जिनमें चार भुजाएँ होती हैं, चतुर्भुज कहलाते हैं।

नीचे दिए गए चित्रों में आपको कहाँ चतुर्भुज दिखाई दे रहा है?





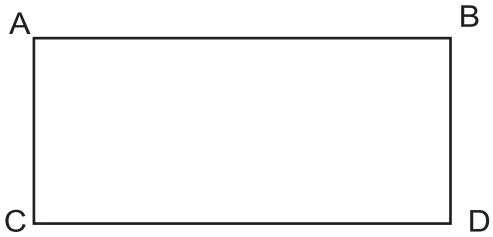
1 कितनी भुजाएँ ———————

2 कितने शीर्ष ————————

3 कितने कोण ————————

हम देखते हैं कि चतुर्भुज में चार भुजाएँ, चार कोण एवं चार शीर्ष होते हैं। आमने–सामने की भुजाएँ व कोण क्रमशः सम्मुख भुजा व सम्मुख कोण कहलाते हैं। जबकि समीप वाली भुजा व कोण आसन्न भुजा व आसन्न कोण कहलाते हैं।

12.5.1 आयत ऐसा चतुर्भुज जिसकी आमने–सामने की भुजाएँ बराबर हो तथा सभी कोण समकोण हो।



चित्र में AB = CD

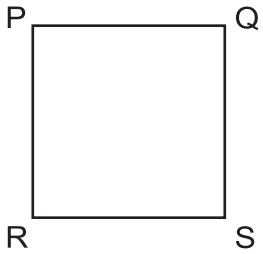
AC = BD

तथा $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$

12.5.2 वर्ग ऐसा चतुर्भुज जिसकी चारों भुजाएँ आपस में बराबर हो तथा प्रत्येक कोण समकोण हों।

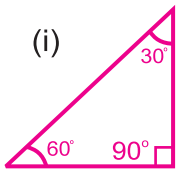
यहाँ PQ = QS = SR= PR

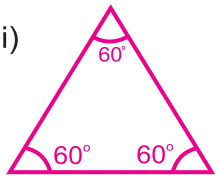
तथा $\angle P = \angle Q = \angle R = \angle S = 90^\circ$

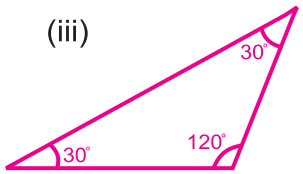


प्रश्नावली 12.2

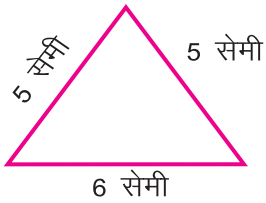
1. निम्न त्रिभुजों के नाम कोणों के माप के आधार पर लिखिए।

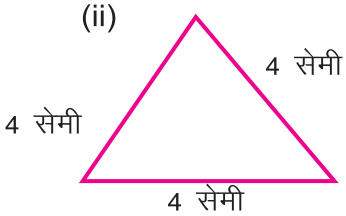
(i)


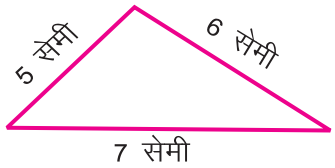
(ii)


(iii)


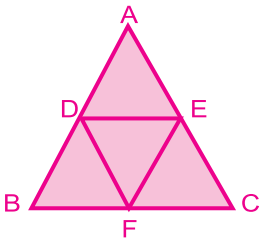
2. भुजाओं के माप के आधार पर त्रिभुजों के प्रकार लिखिए।

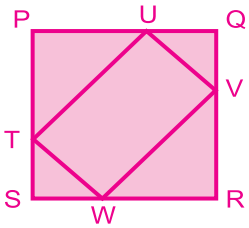
(i)


(ii)


(iii)


3. निम्नांकित आकृतियों में बने सभी त्रिभुजों के नाम लिखिए।

(i)


(ii)


4. कोष्ठक में सही/गलत लिखिए।

(i) किसी त्रिभुज में तीन कोण, तीन भुजा एवं तीन शीर्ष होते हैं। ( )

(ii) किसी त्रिभुज के तीनों कोण समकोण से कम हों तो उसे समकोण त्रिभुज कहते हैं। ( )

(iii) किसी त्रिभुज की तीनों भुजाएँ समान हों तो उसे समबाहु त्रिभुज कहते हैं। ( )

(iv) किसी त्रिभुज में अधिकतम एक ही समकोण हो सकता है। ( )

(v) विषमबाहु त्रिभुज में दो भुजाएँ समान माप की होती हैं। ( )

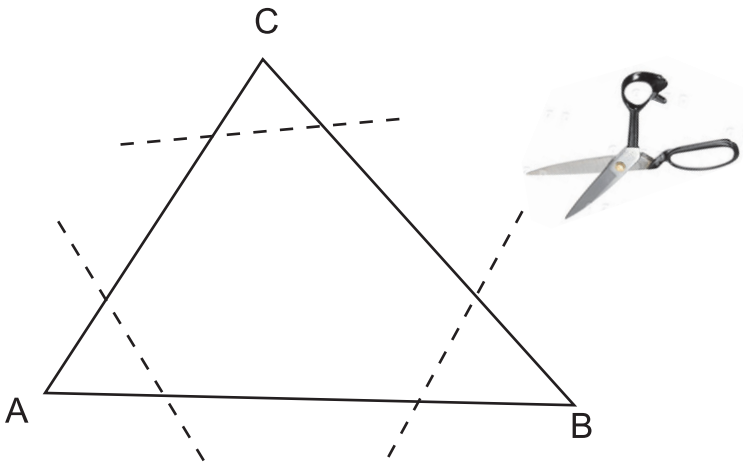
अध्याय 13

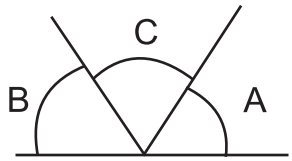
त्रिभुज और उसके गुण

हमने पिछले अध्याय में पढ़ा है कि तीन भुजाओं से घिरी बंद आकृति को त्रिभुज कहते हैं। आइए त्रिभुज के गुणधर्मों पर चर्चा करें।

13.1 त्रिभुज के अन्तः कोणों का योग

1. आप अपने मन से कोई भी एक त्रिभुज बनाइए और चित्र में दिए अनुसार किनारों से काटकर जमाइए।





कोण A, B व C के कट आऊट इस तरह से जमाइए।

आप पाएँगे कि किसी भी त्रिभुज में इस तरह से तीनों कोणों को काटकर, जमाने पर एक सरल कोण का निर्माण होता है।

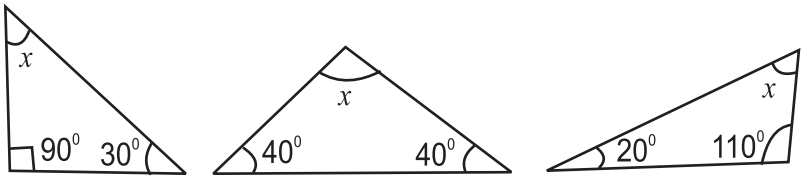
अतः $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

अतः किसी भी त्रिभुज के तीनों अन्तः कोणों का योग सदैव 180^0 होता है।

कोण ज्ञात कीजिए

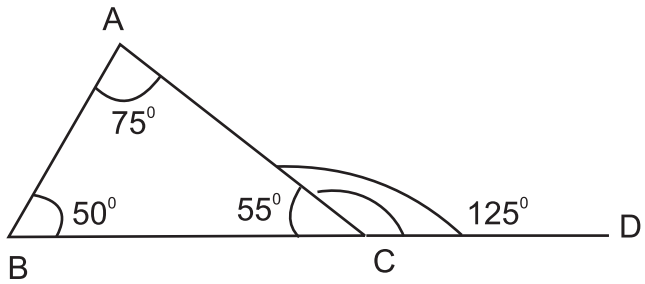
नीचे दिए गए प्रत्येक त्रिभुज में x का मान ज्ञात कीजिए।

$x + 90 + 30 = 180^0$
$x + 120 = 180^0$
अतः
$x = 60^0$



13.2 त्रिभुज के बाह्य कोण एवं इसके गुण

नीचे दिए त्रिभुज में विभिन्न कोणों के मान पर ध्यान दीजिए।



त्रिभुज के तीनों अन्तः कोण

$(\angle A + \angle B) + \angle C = 180^0$

$(75^0 + 50^0) + 55^0 = 180^0$

$125^0 + 55^0 = 180^0$

कोण $\angle A$ व $\angle B$ को $\angle C$ के बाह्य कोण के लिए सम्मुख अन्तः कोण कहते हैं।

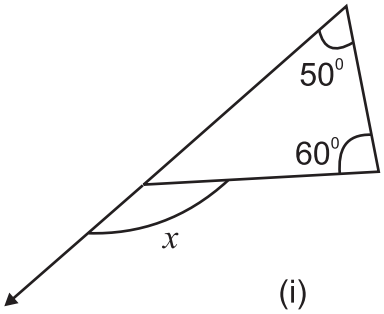
आपने ऊपर देखा कि

$\angle A + \angle B = \angle ACD$ (बाह्य कोण)

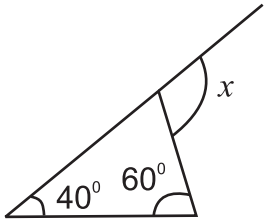
यह संबंध आप सभी त्रिभुजों में देखेंगे। अतः किसी त्रिभुज का बाह्य कोण उसके दोनों सम्मुख अन्तः कोण के योग के बराबर होता है।

करके देखो –

निम्न चित्रों में बाह्य कोण x का मान ज्ञात कीजिए।



(i)



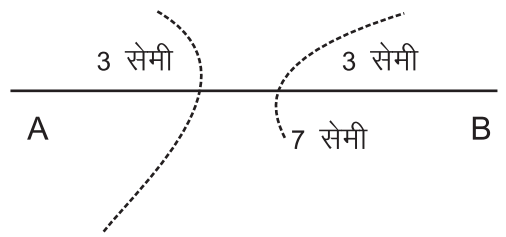
(ii)

13.3 किसी त्रिभुज की भुजाओ की माप में संबंध किसी त्रिभुज की दो भुजाओं की मापों का योग सदैव तीसरी भुजा की माप से बड़ा होता है तभी त्रिभुज बनाना संभव होता है।

करके देखिए –

1. नीचे दी गई भुजाओं की मापों में से किन मापों से त्रिभुज बनाया जा सकता है?

(a) 3, 7, 8 (b) 2, 2, 6



यहाँ चूंकि अन्य दोनों बिन्दु से काट 3 सेमी है जिसमें हमें रेखा के ऊपर या नीचे कोई कटान बिन्दु नहीं मिल रहा है। अतः त्रिभुज नहीं बनेगा।

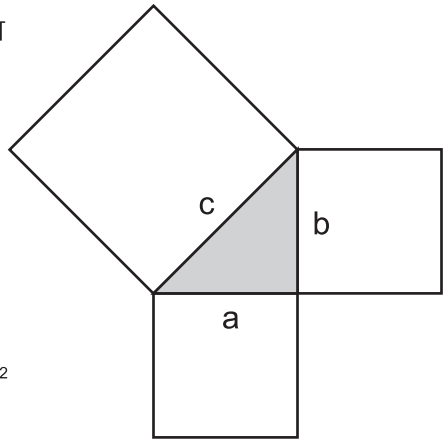
13.4 बोधायन प्रमेय (पाइथागोरस प्रमेय) –

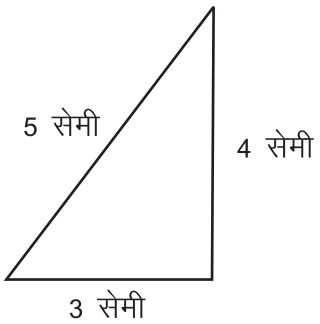
समकोण त्रिभुज में समकोण के सामने वाली भुजा (कर्ण) पर बने वर्ग का क्षेत्रफल अन्य दो भुजाओं पर बने वर्गों के क्षेत्रफलो के योग के बराबर होता है।

अतः $a^2 + b^2 = c^2$

एक समकोण त्रिभुज जिसका कर्ण 5 सेमी, आधार 3 सेमी व लम्ब 4 सेमी है। पाइथागोरस प्रमेय $a^2 + b^2 = c^2$

अर्थात् $(\text{कर्ण})^2 = (\text{आधार}^2) + (\text{लम्ब})^2$ को जाँचने पर





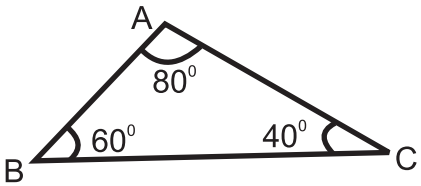
$(5)^2 = (3)^2 + (4)^2$

$25 = 9 + 16$

$25 = 25$

13.5 भुजा एवं कोण में संबंध

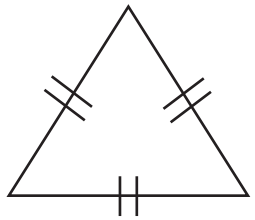
त्रिभुज में सबसे बड़ी भुजा के सामने का कोण सबसे बड़ा होता है।



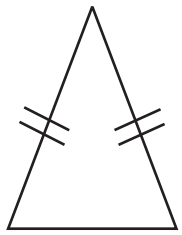
दिए गए त्रिभुज में भुजाओं की लम्बाई मापिए। आप देखेंगे की सबसे बड़े कोण के सामने की भुजा सबसे लम्बी होगी।

सोचिए, समद्विबाहु त्रिभुज व समबाहु त्रिभुज की भुजाओं व कोणों में क्या संबंध होता है?

समबाहु त्रिभुज में चूंकि सभी भुजाओं की माप समान है। अतः सभी कोण भी बराबर होंगे।

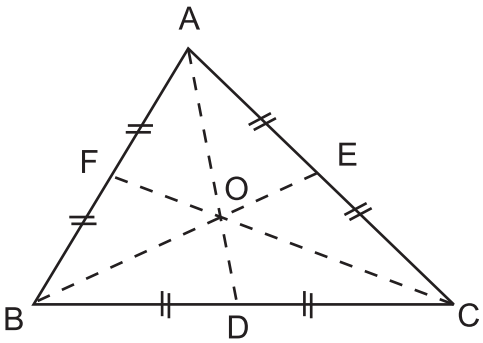


समबाहु त्रिभुज



समद्विबाहु त्रिभुज

13.6 त्रिभुज की माध्यिकाएँ आप जानते हैं कि त्रिभुज के तीन शीर्ष बिन्दु होते हैं। किसी भी शीर्ष से उसके सामने की भुजा के मध्य बिन्दु को जोड़ने वाली रेखा माध्यिका कहलाती है।



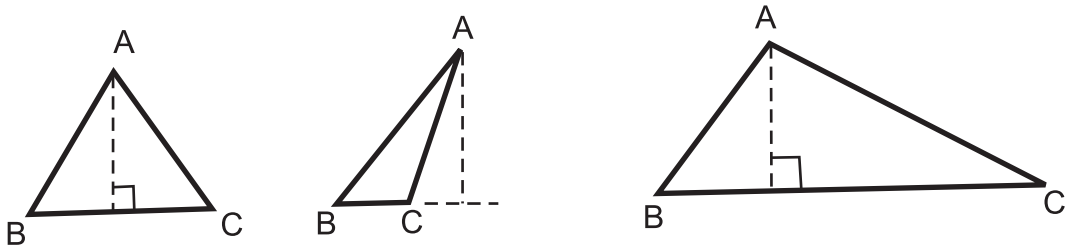
D, BC का मध्य बिन्दु है।

इसी प्रकार E व F क्रमशः AC व AB के मध्य बिन्दु हैं। इनको मिलाने पर कटान बिन्दु O मिलता है।

जहाँ पर तीनों माध्यिकाएँ मिलती हैं उस बिन्दु को त्रिभुज का केन्द्रक कहते हैं।

13.7 त्रिभुज के शीर्ष लम्ब त्रिभुज के किसी शीर्ष से उसकी सम्मुख भुजा पर डाला गया लम्ब शीर्ष लम्ब कहलाता है।

शीर्ष लम्ब त्रिभुज के बाहर भी हो सकता है। उदाहरण के लिए

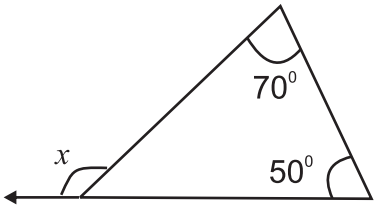


शीर्ष लम्ब जिस भुजा पर डाला जाता है वह उस भुजा के सापेक्ष त्रिभुज की ऊँचाई होती है।

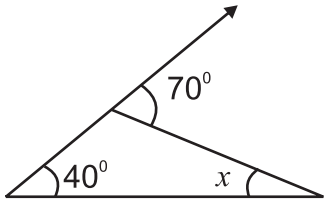
प्रश्नावली 13

1. नीचे दी गई आकृतियों में अज्ञात कोण x का मान ज्ञात कीजिए।

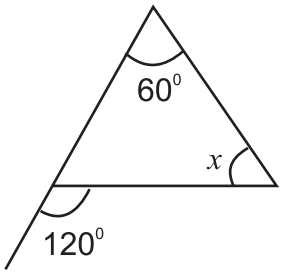
(i)



(ii)



(iii)



2. किसी समकोण त्रिभुज का एक न्यून कोण 45° का है तो इसका दूसरा न्यून कोण ज्ञात कीजिए।

3. नीचे कुछ कोणों के त्रिक दिए गए हैं। बताइए इनमें से कौन–कौन से त्रिभुजों के कोणों को प्रदर्शित करते हैं ?

(i) $100^\circ, 30^\circ, 40^\circ$ (ii) $50^\circ, 40^\circ, 90^\circ$ (iii) $110^\circ, 50^\circ, 40^\circ$

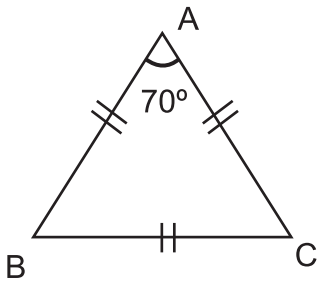
4. भुजाओं की मापों के आधार पर बताइए कौन–कौन सी माप से त्रिभुज बनाया जा सकता है।

(i) 6, 5, 5 (ii) 2, 3, 4 (iii) 7, 4, 7 (iv) 1, 2, 7

5. एक त्रिभुज का चित्र बनाकर उसमें शीर्ष से एक माध्यिका और शीर्ष लम्ब को दर्शाइए।

6. त्रिभुज ABC में $\angle A = 70^\circ$ तथा AB = AC

हो तो $\angle B$ व $\angle C$ का मान क्या होगा।



7. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ।

(i) प्रत्येक त्रिभुज में कम से कम दो कोण ––––– होते हैं।

(ii) –––––––– त्रिभुज के दो कोण समान होते हैं।

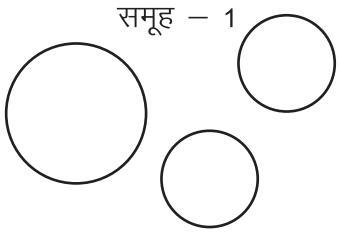
(iii) त्रिभुज की दो भुजाओं के मापों का योग तीसरी भुजा से ––––––––– होता है।

अध्याय 14

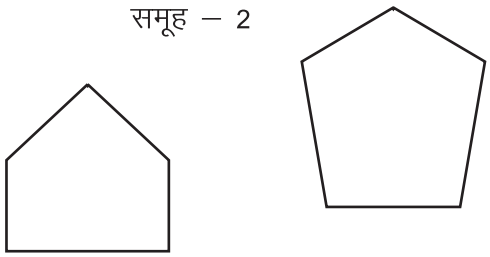
त्रिभुजों की सर्वांगसमता एवं रचना

14.1 नीचे आकृतियाँ के दो समूह दिए है।

समूह – 1



समूह – 2



समूह–2 की आकृतियों को पंचभुज कहते हैं।

आप समूह–1 की तीनों वृत्ताकार आकृतियों को ट्रेस (Trace) करें और काटकर अलग करें।

सभी को अलग–अलग एक दूसरे के ऊपर रखकर देखें तो पायेंगे की एक वृत्त बड़ा है जबकि अन्य दो वृत्त एकदम बराबर है। अतः वृत्त एक दूसरे को पूरी तरह से ढ़क लेते हैं।

ऐसी आकृतियाँ जो आकार व माप में समान हों, वे सर्वांगसम आकृतियाँ कहलाती हैं। सोचिए – आपके आसपास कौन–कौन सी वस्तुएँ, आकृतियाँ आपको सर्वांगसम नजर आ रही हैं। उनकी सूची बनाइए।

(1) ——————————————(2) ——————————————

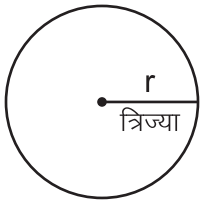
(3) ——————————————(4) ——————————————

(ii) समूह–2 के पंचभुजों को चिकने पेपर (Butter Paper) पर (Trace) करिए व काटकर देखिए क्या वे सर्वांगसम हैं ?

———————— ————

अब सोचिए यदि आपसे पूछा जाये कि दो वृत्त कब सर्वांगसम होंगे तो आपका क्या जवाब होगा।

यदि किन्ही भी दो वृत्तों की त्रिज्या समान हो तो वह सर्वांगसम होते हैं।

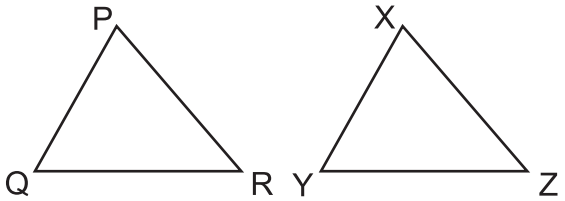


सोचिए
इसी प्रकार दो वर्गों के सर्वांगसम होने की क्या शर्त होगी ?

वर्ग

14.2 त्रिभुजों में सर्वांगसमता एवं उनकी रचना

नीचे दो सर्वांगसम त्रिभुज दिए गए हैं। यदि $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ है तो



आप पायेंगे कि बिन्दु P को X, Q को Y व R को Z के संगत रखने पर दोनों त्रिभुज एक दूसरे को पूरी तरह से ढक लेते हैं।

यहाँ कोण $\angle PQR = \angle XYZ$, $\angle QRP = \angle YZX$

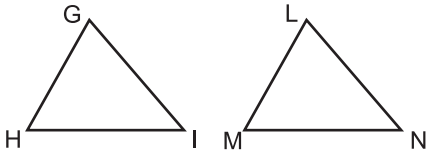
$\angle RPQ = \angle ZXY$ संगत कोण व

भुजा $PQ = XY$, $QR = YZ$, $PR = XZ$ संगत भुजा है।

सर्वांगसमता का चिह्न $\cong$ है।

करके देखिए

$\Delta GHI \cong \Delta LMN$ है इनके संगत कोण व संगत भुजा लिखिए।



---

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(i) दो रेखाखण्ड सर्वांगसम होते हैं यदि उनकी ——— समान हो।

(ii) दो सर्वांगसम त्रिभुज ΔPQR और ΔABC में कोण $\angle P$ का माप 60° है तो $\angle A$ का माप ——— होगा ।

14.3 त्रिभुज की सर्वांगसमता व रचना में संबंध

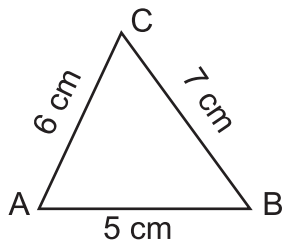
एक अद्वितीय त्रिभुज की रचना करने के लिए कम से कम तीन अवयवों की आवश्यकता होती है जिसमें कम से कम एक भुजा का होना आवश्यक है।

जो शर्त अद्वितीय त्रिभुज की रचना में ली जाती है, उसे दो त्रिभुजो में समान पाए जाने पर कहा जा सकता है कि वह दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होंगे।

14.3.1 SSS त्रिभुज की रचना (जिसकी तीनों भुजाओं की नाप दी हो)

एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें AB = 5 सेमी, BC = 7 सेमी और AC = 6 सेमी हो।

हल – पहले हम दी हुई मापों से कच्चे चित्र का निर्माण करते हैं।

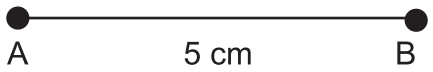


कच्चा चित्र

चरण 1 – तीनों भुजाओं में से कोई भी एक भुजा का रेखाखण्ड खींचिए।

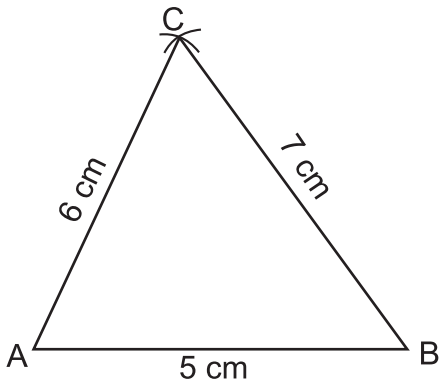
यहाँ हम AB = 5 cm खींच रहे हैं।

चरण 2 – अब बिन्दु A से 6 cm का परकार में चाप लेकर एक ओर चाप खींचते हैं।



चरण 3 – बिन्दु B से 7 cm का परकार में चाप भरकर काटेंगे।

चरण 4 – कटान बिन्दु C को A व B से मिलाकर △ ABC का निर्माण पूरा करेंगे।



आप सोचिए यदि आपको दो त्रिभुज समान विमाओं (जिनकी भुजाओं की माप एक–दूसरे के समान हो) के दिए जाएँ, तो क्या वे अलग–अलग बनाए जा सकते हैं।

करके देखिए – △ ABC जिसमें भुजा AB = 4 cm, BC = 6 cm व CA = 7 cm हो। व

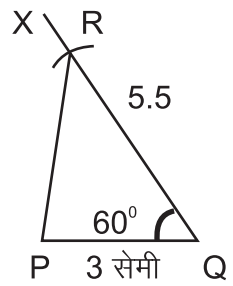
$\triangle$ PQR जिसमें QR = 6 cm RP = 7 cm व PQ = 4 cm है बनाकर ट्रेस करिए, अब उन दोनों त्रिभुजों के तीनों कोणों को भी नापिये क्या संगत कोण बराबर हैं?

> अतः एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हों तो वह दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। इसे सर्वांगसमता का भुजा–भुजा–भुजा SSS नियम कहते हैं।

14.3.2 SAS (भुजा–कोण–भुजा) त्रिभुज की रचना त्रिभुज जिसकी दो भुजाएँ एवं उनके बीच का कोण दिया हो, की रचना करना।

एक त्रिभुज ΔPQR की रचना करना जबकि PQ = 3 सेमी, QR = 5.5 सेमी और कोण $\angle PQR = 60^0$ है।

हल – दी हुई माप के अनुसार एक कच्चा चित्र बनाते हैं।



चरण 1 – 3 सेमी लम्बाई का एक रेखाखण्ड PQ खींचिए।

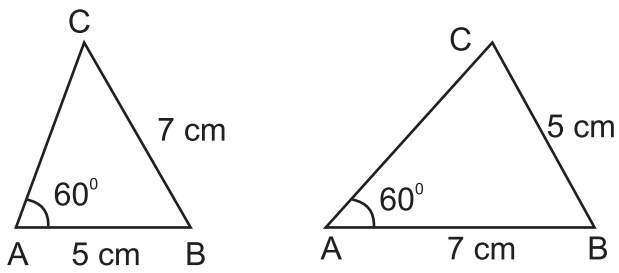
चरण 2 – Q पर किरण QX खींचिए जो PQ के साथ 60^0 का कोण बनाए। अब Q से 5.5 का चाप लेकर QX पर काटिए। जो इसे बिन्दु R पर काटता है।

चरण 3 – बिन्दु R को P से मिलाकर ΔPQR पूरा कीजिए।

SAS सर्वांगसमता

सोचिए – यदि आपको किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ व कोई भी एक कोण दिया हो तो क्या आप एक अद्वितीय त्रिभुज का निर्माण कर सकते हैं ?

यदि कोई त्रिभुज भुजा 5 cm व 7 cm एवं एक कोण 60^0 पैमाने से बनाया जाये तो आप पाएंगे कि ये त्रिभुज आपस में सर्वांगसम नहीं हैं।



अतः दो त्रिभुज तभी सर्वांगसम होते हैं जबकि दी गई दो भुजाओं के बीच का कोण दिया हो और वे समान हों।

करके देखिए

(i) $\triangle$DEF की रचना कीजिए जबकि DE = 4 सेमी, DF = 3 सेमी और $\angle EDF = 90^0$ हों।

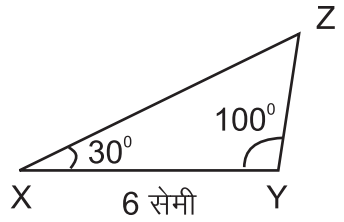
(ii) $\triangle$ PQR जिसमें QR = 7.5 सेमी, PC = 5 सेमी और $\angle R = 60^0$ तथा $\triangle$ABC में AC = 5 सेमी और BC = 7.5 और $\angle C = 60^0$ की रचना कीजिए । ट्रेसिंग कर पता लगाइए क्या ये सर्वांगसम हैं?

14.3.3 ASA सर्वांगसमता व त्रिभुज की रचना

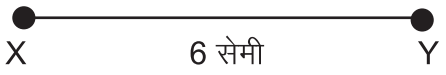
एक त्रिभुज जिसकी दो कोणों की माप और इन कोणों की अन्तर्गत भुजा की लम्बाई दी हो की रचना करना।

उदाहरण $\triangle$ XYZ की रचना कीजिए, यदि XY = 6 सेमी., $\angle ZXY = 30^0$ और $\angle XYZ = 100^0$ है।

दी हुई माप के अनुसार कच्चा चित्र बनाते हैं।



चरण 1 – 6 सेमी लम्बाई का रेखाखण्ड खींचिए।

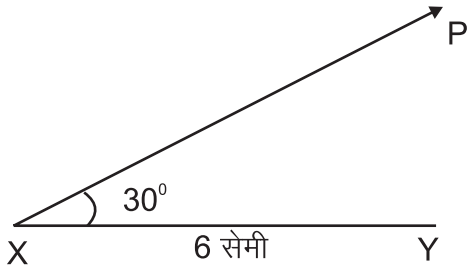


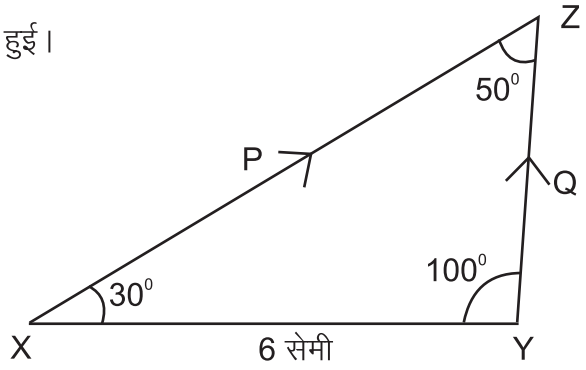
चरण 2 – X पर किरण XP खींचिए जो XY से 30^0 का कोण बनाए।

चरण 3 – Y पर किरण YQ खींचिए जो YX से 100^0 का कोण बनाए।

चरण 4 – किरण XP एवं किरण YQ का कटान बिन्दु Z होगा।

इस प्रकार $\triangle$XYZ की रचना हुई।

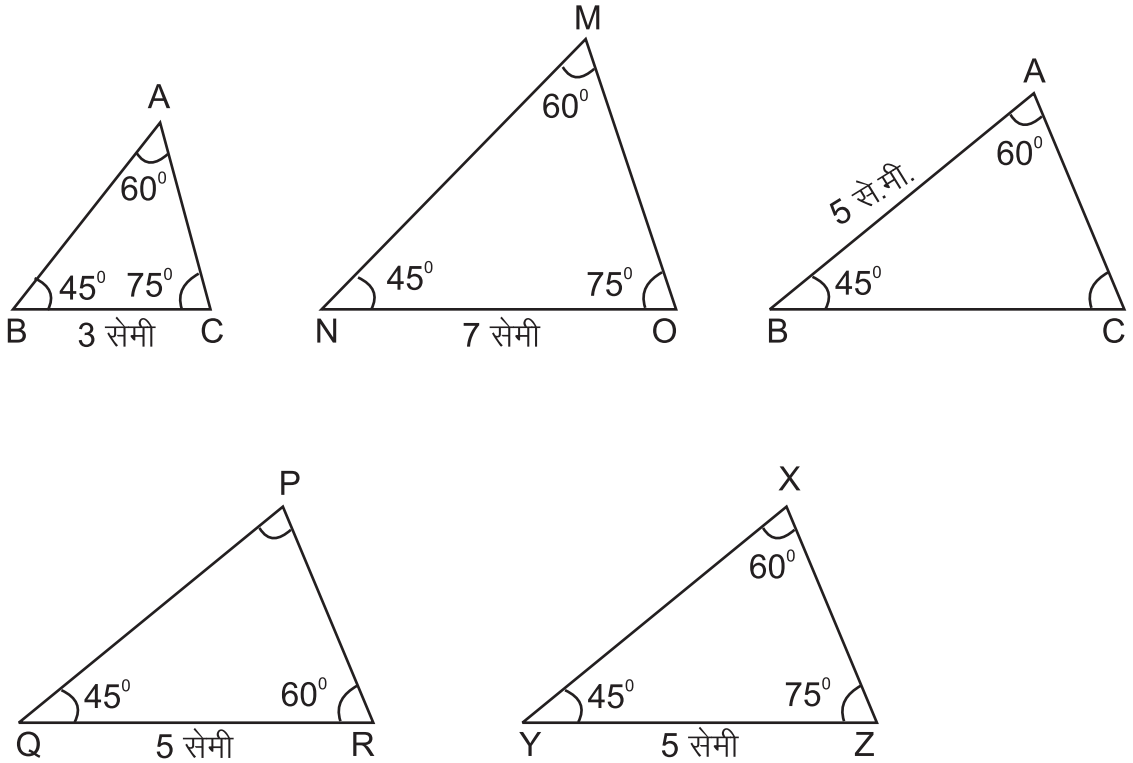




ASA सर्वांगसमता

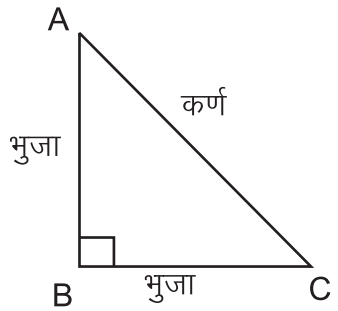
यदि किसी एक त्रिभुज की एक भुजा व उस भुजा पर बने दोनों कोण, दूसरे त्रिभुज की संगत भुजा एवं उन पर बने कोणों के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

नीचे दिए गए त्रिभुजों में से कौनसे दो त्रिभुज सर्वांगसम है?



14.3.4 समकोण – कर्ण – भुजा (RHS) सर्वांगसमता

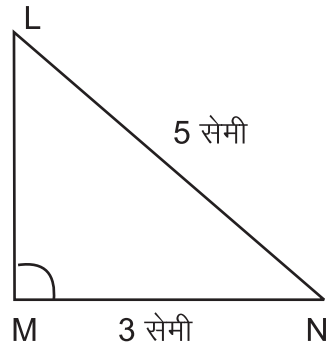
आपने पूर्व में देखा है कि दो भुजाओं और उनके बीच का कोण समान होने पर ही दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। इसे SAS सर्वांगसमता कहते हैं परंतु समकोण त्रिभुज में कोई भी दो भुजाएँ समान होने पर वह त्रिभुज सर्वांगसम हो जाते है।



चूंकि समकोण त्रिभुज में दो भुजाएँ स्थिर होने पर तीसरी भुजा भी स्थिर हो जाती है। अतः RHS, SAS का ही एक रूप है।

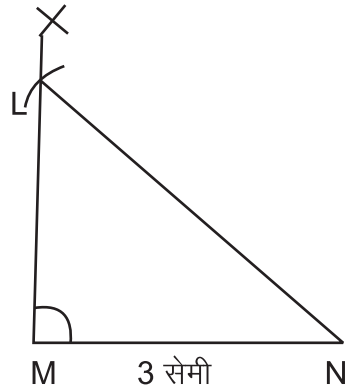
एक समकोण त्रिभुज की रचना

$\triangle$ LMN का रचना कीजिए जिसका $\angle$LMN समकोण है तथा दिया है कि LN = 5 सेमी और MN = 3 सेमी



दी गई माप के अनुसार कच्चा चित्र बनाते है।

चरण 1 – वह रेखाखण्ड खींचते है जिस पर समकोण त्रिभुज बनाना है।

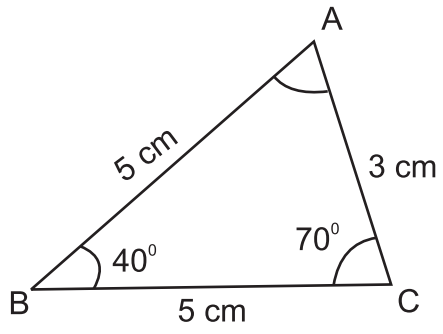


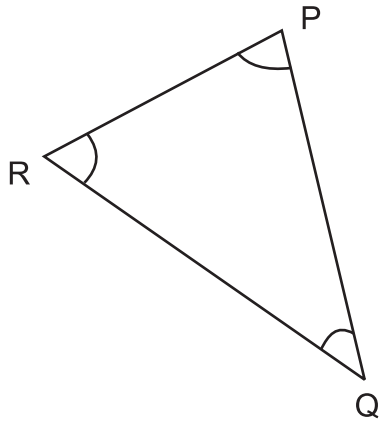
चरण 2 – अब M पर समकोण की रचना करते हैं।

चरण 3 – अब N से 5 cm का चाप परकार में लेकर समकोण वाली भुजा MX को काटते हैं। फिर उस बिन्दु को L से अंकित कर N से मिलाते हैं।

प्रश्नावली 14

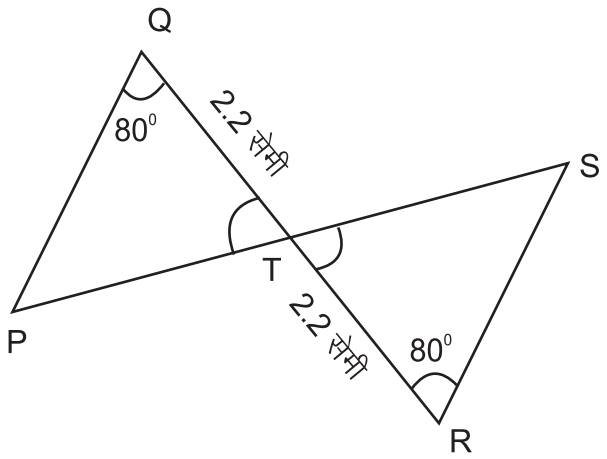
1. दिए गए चित्र में $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ हो तो ΔPQR में संगत कोणों एवं भुजाओं का मान अंकित कीजिए।





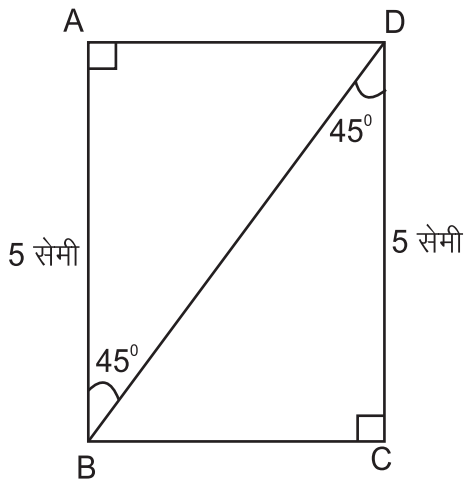
2. नीचे दिए गए चित्रों में त्रिभुजों की सर्वांगसमता का कौनसा प्रतिबन्ध लागू होता है ? सर्वांगसम त्रिभुजों को सांकेतिक रूप से लिखिए।

(i)



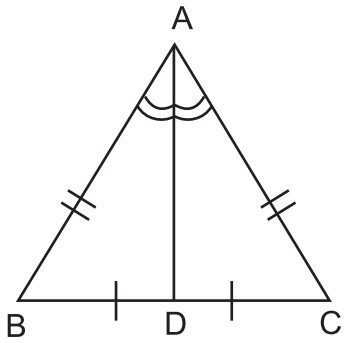
कारण – – – – – – – – –

(ii)

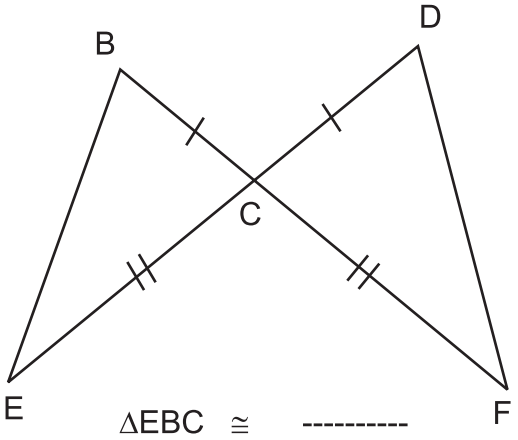


कारण – – – – – – – – –

3. **कथन को पूरा कीजिए :–**



Δ ADB $\cong$ ----------



ΔEBC $\cong$ ----------

4. **त्रिभुजों की रचना कीजिए।**

(i) $\triangle$ PQR की रचना कीजिए जबकि PQ = 5 सेमी, QR = 4.5 सेमी तथा RP = 6 सेमी हों।

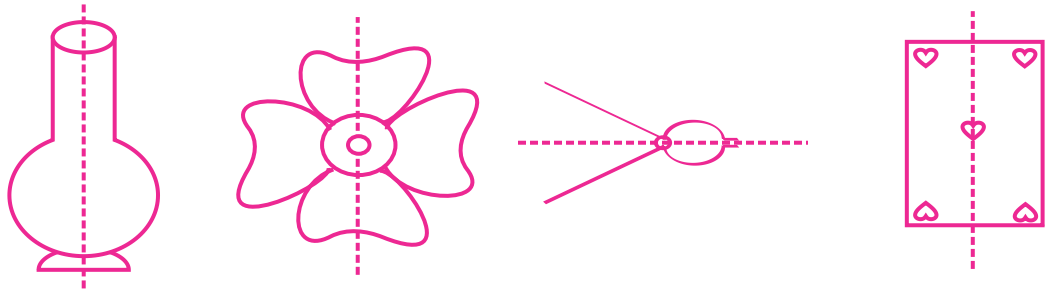
(ii) $\triangle$ MNO की रचना कीजिए जबकि कर्ण MO = 5 सेमी, आधार MN = 3 सेमी तथा $\angle N = 90^0$ है।

(ii) $\triangle$ XYZ की रचना कीजिए जहाँ XY = 5 सेमी, $\angle X = 75^0$ तथा $\angle Z = 53^0$ (संकेत – त्रिभुज के तीनों कोणों का योग = 180^0 होता है अतः $\angle X + \angle Y + \angle Z = 180^0$)

अध्याय 15

सममिति

15.1 नीचे दी गई आकृत्तियों को देखें।

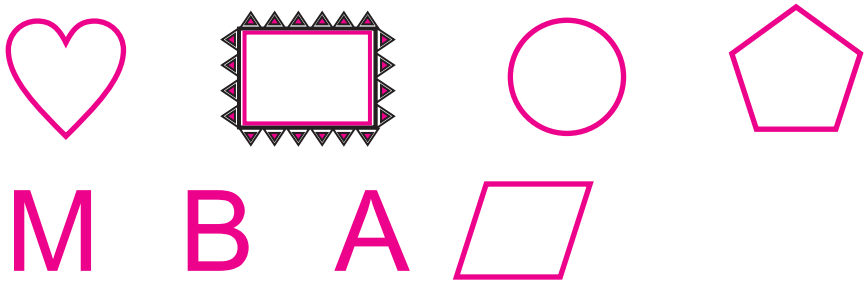


(i) (ii) (iii) (iv)

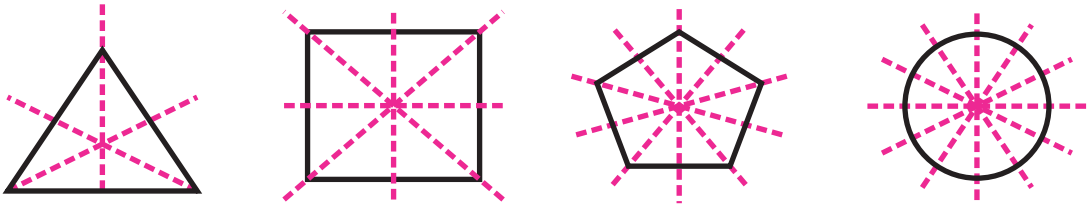
इन आकृतियों को बीच से रेखांकित रेखा के अनुदिश मोड़ा जाए या काटा जाए तो बनने वाले हिस्से एक दूसरे को पूरी तरह से ढ़क लेते हैं। इस प्रकार की आकृतियाँ सममित आकृतियाँ कहलाती हैं व रेखा सममित रेखा कहलाती है।

(i) ऐसे अंग्रेजी के वर्णाक्षर लिखिए जिसमें सममित रेखाएँ खींच सकते हैं।

(ii) इन चित्रों में सममित रेखाएँ खींचिए।

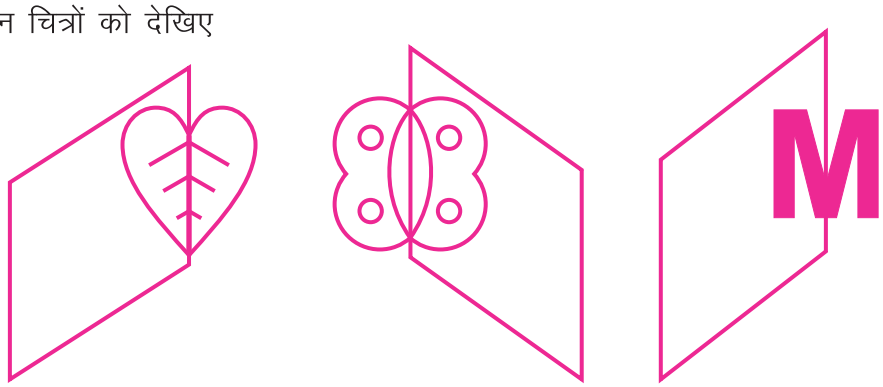


15.2 रैखिक सममिति किसी भी चित्र में एक से अधिक सममित रेखाएँ हो सकती हैं। समबहुभुज में सममित रेखाओं की संख्या उनकी भुजाओं की संख्या के साथ बढ़ती जाती है। वृत्त में अनन्त सममित रेखाएँ हो सकती हैं।



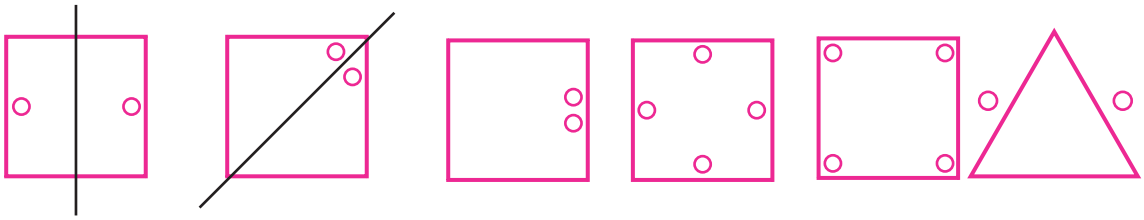
15.3 दर्पण द्वारा सममित रेखा का पता लगाना

इन चित्रों को देखिए



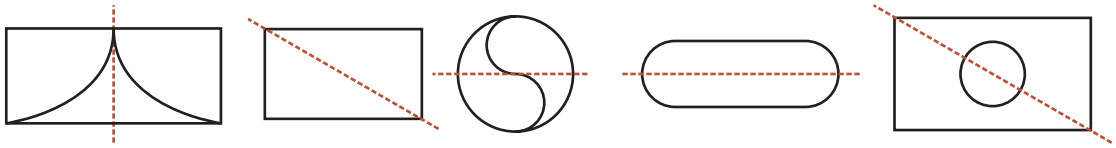
इन चित्रों में आधा हिस्सा दर्पण के सामने है तथा आधा दर्पण में। दोनों हिस्सों के मिलने से चित्र पूरा होता दिखाई देता है। रेखिक सममिति को परावर्तन सममिति भी कहते है। इन चित्रों का दर्पण प्रतिबिम्ब चित्र का आधा भाग है, दर्पण का किनारा सममित अक्ष के रूप में है। दर्पण रेखा सममित रेखा ज्ञात करने में मदद करती है।

निम्न चित्रों में दर्पण से सममित अक्ष ढूँढने का प्रयास कीजिए –

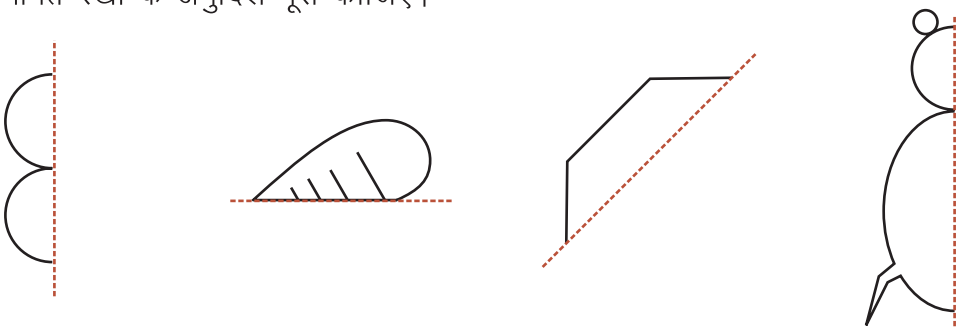


प्रश्नावली 15

1. आकृति में जो बिन्दु रेखा है वह आकृति की सममित रेखा है या नहीं?



2. सममित रेखा के अनुदिश पूरा कीजिए।



अध्याय 16

त्रिविमीय आकारों की समझ

16.1 त्रिविमीय आकार – हमनें आयत, वर्ग, त्रिभुज आदि आकृतियों के बारे में पढ़ा है। इनमें दो विमाएँ लम्बाई एवं चौड़ाई होती है। ठोस आकृतियों में लम्बाई, चौड़ाई के साथ–साथ गहराई या ऊँचाई भी होती है इन्हें त्रिविमीय (3D) आकृतियाँ कहते हैं।

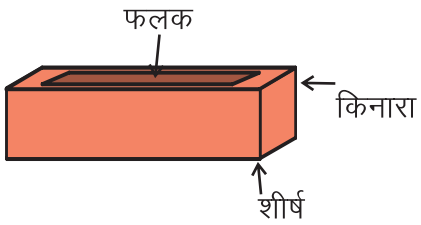
16.1.1 घनाभ – केवल सपाट सतह वाले ठोस जैसे सन्दूक, ईंट, ब्लेड का पैकेट आदि घनाभ के उदाहरण है। ऐसा ही एक घनाभ माचिस की डिब्बी है इसे ध्यान पूर्वक देखकर निम्न प्रश्नों के उत्तर दो –

(i) घनाभ की कितनी सतह होती है ? ——————

(ii) सभी सतहों का आकार कैसा है ? ——————

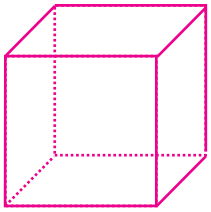
(iii) घनाभ में कितने किनारे होते हैं ? ——————

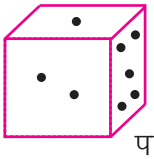
(iv) घनाभ में कितने शीर्ष होते हैं ? ——————



घनाभ का प्रत्येक पृष्ठ (फलक) आयताकार होता है। यह पृष्ठ इसका फलक कहलाता है। घनाभ में कुल 6 फलक, 12 किनारे एवं 8 शीर्ष होते हैं।

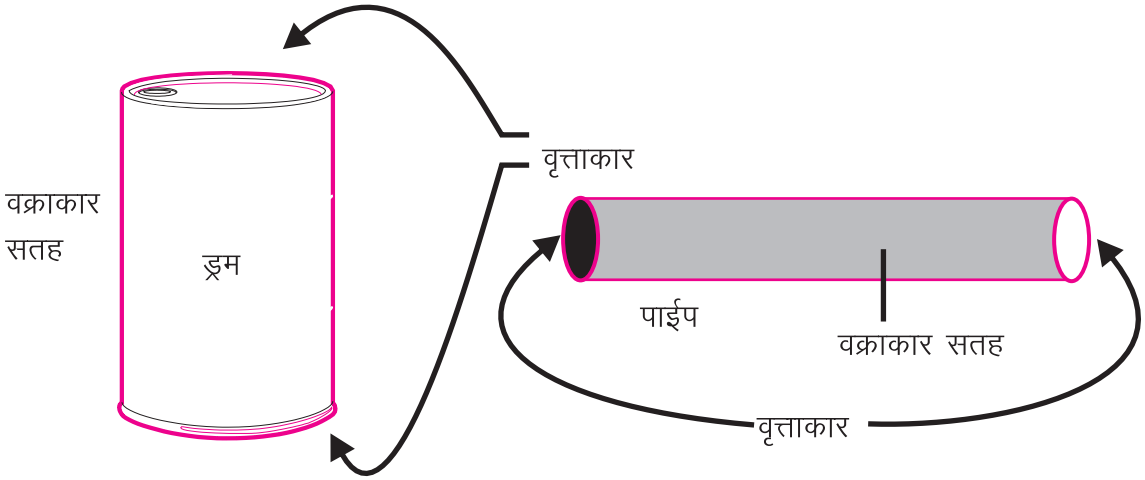
16.1.2 घन – यदि किसी घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई तीनों समान हो तो वह आकृति घन कहलाती है। इसका प्रत्येक फलक वर्गाकार होता है।



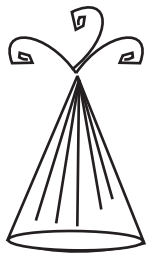


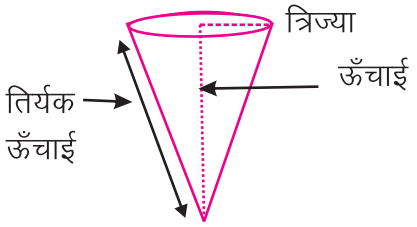
पासा

16.1.3 बेलन – लकड़ी का गट्टा, पानी का पाईप, ड्रम जैसी आकृतियाँ जिनकी एक सतह वक्राकार व दो सतहें वृत्ताकार होती हैं, वे बेलन कहलाती हैं।



16.1.4 शंकु – हमने जोकर की टोपी, आईसक्रीम का कोन आदि आकृतियाँ देखी हैं, इनमें एक वक्र पृष्ठ एवं एक वृत्ताकार पृष्ठ होता है। ऐसी आकृतियाँ शंकु कहलाती है।

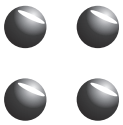




आप भी अपने चारों ओर देखो कि कहाँ–कहाँ शंकु आकार की वस्तुएँ दिखाई देती हैं।

16.1.5 गोला – आप सभी गेंद, फुटबॉल, कंचे से खेलते होंगे, इनका आकार कैसा है ? ये सभी वस्तुएँ गोलाकार हैं।

गोले में केवल एक वक्र सतह ही होती है।



कंचे

नारंगी

(1) रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए –

(i)

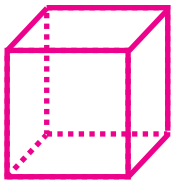
घनाभ –

फलक की संख्या = ----------

किनारों की संख्या = ----------

शीर्षों की संख्या = ----------

(ii)



घन –

फलक की संख्या = ----------

किनारों की संख्या = ----------

शीर्षों की संख्या = ----------

(iii)

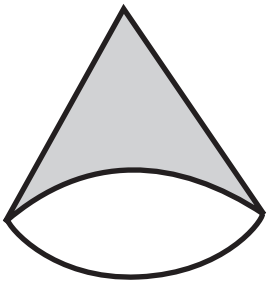
बेलन –

वक्र पृष्ठों की संख्या = ----------

समतल सतहों की संख्या = ----------

शीर्षों की संख्या = ----------

(iv)



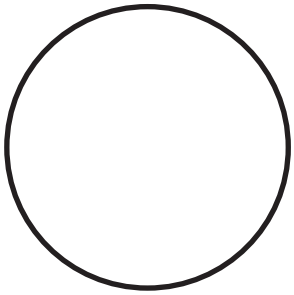
शंकु –

वक्र पृष्ठों की संख्या = ----------

समतल सतहों की संख्या = ----------

शीर्षों की संख्या = ----------

(v)



गोला –

वक्र पृष्ठों की संख्या = ----------

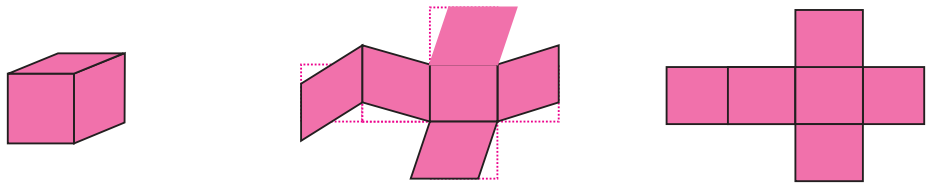
समतल सतहों की संख्या = ----------

शीर्षों की संख्या = ----------

16.2 त्रिविमीय आकारों का समतल पर निरूपण

अदिति अपने दोस्त को जन्मदिन पर उपहार देना चाहती है जिसे उसे गिफ्ट पैक करना है। इसके लिए वह एक घनाकार डिब्बा बनाना चाहती है इसके लिए वह एक चाय का डिब्बा काटकर खोलती है।

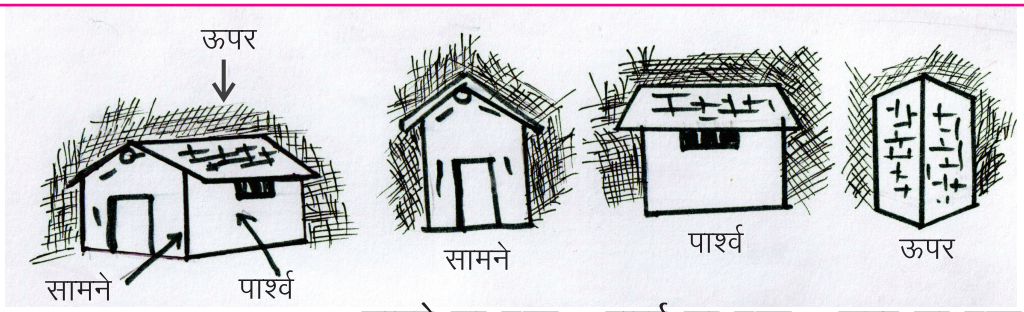
अब वह इसे कार्ड शीट पर बनाकर उसे काटकर डिब्बा बना लेती है।



इसी प्रकार वह जन्मदिन की टोपियाँ बनाने के लिए भी कार्ड शीट पर जाल बनाती है। कैंची से काटकर टोपियाँ बनाती है।

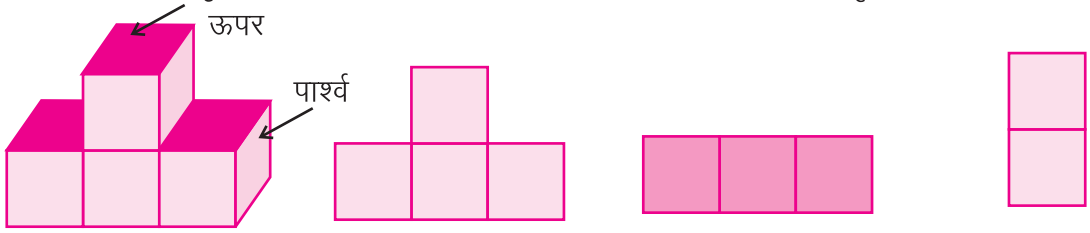
आप इसी प्रकार बेलनाकार, घनाभाकार डिब्बों को काटकर उनके जाल चित्र बनाएँ।

16.3 ठोस आकारों को विभिन्न कोणों से देखना (सामने, पार्श्व एवं ऊपर से दृश्य) किसी वस्तु (ठोस आकार) को उसके सामने, दाईं ओर से या उसके ऊपर से देखने पर प्रत्येक बार भिन्न दृश्य दिखाई देता है।



सामने का दृश्य **पार्श्व का दृश्य** **ऊपर का दृश्य**

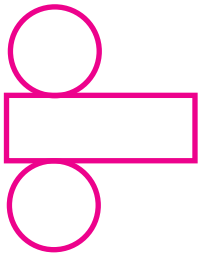
इसी प्रकार निम्न आकृति को देखकर उसके सामने के, ऊपर के तथा पार्श्व दृश्य पर विचार कीजिए।

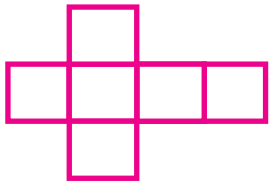


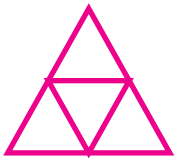
सामने सामने ऊपर पार्श्व

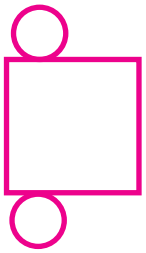
प्रश्नावली 16

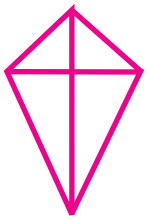
1. नीचे कुछ जाल चित्र तथा त्रिविमीय आकृतियाँ दी गई हैं। आकृति का जालक चित्र से सही–सही मिलान कीजिए।

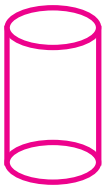
(i) 

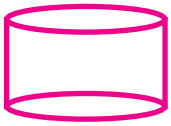
(ii) 

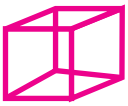
(iii) 

(iv) 

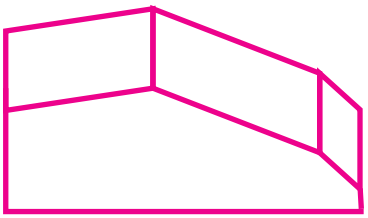
(a) 

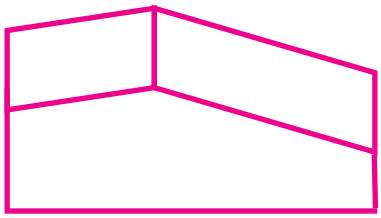
(b) 

(c) 

(d) 

2. नीचे दिए गए ठोसों को सामने से, पार्श्व से तथा ऊपर से देखने पर बनने वाले दृश्यों को बनाइए।





अध्याय 17

बीजीय व्यजंक

17.1 बीजगणित में हम अज्ञात राशियों को दर्शाने एवं ज्ञात करने के लिए इन्हें हिन्दी एवं अंग्रेजी वर्णमाला के वर्ण से प्रदर्शित करते हैं, इन्हें बीज अथवा बीजांक कहते हैं।

17.1.2 चर की अवधारणा तीलियों से बनाए गए प्रतिरूपों को देखिए।

(a) (b) (c)

इस प्रकार हम देखते हैं कि एक L आकार के लिए 2 तीलियाँ, 2 L के लिए 4 तीलियाँ लगती है इसी प्रकार यदि इस पैटर्न को आगे बढ़ाए तो तीलियों की संख्या 2 के गुणज के रूप में बढ़ेगी। रिक्त स्थान में आने वाली संख्या लिखिए –

बनाए गए L की संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8
तीलियों की संख्या	2	4	6	8	–	–––	–––	–––

सारणी में लिखते समय हम देखते हैं कि आवश्यक तीलियों की संख्या बनाए गए L की संख्या की दो गुनी है। अर्थात्

आवश्यक तीलियों की संख्या = 2 × L की संख्या

अतः हम तीलियों की संख्या = 2 × L में L = 1, 2, 3, ... रखकर तीलियों की संख्या ज्ञात कर सकते हैं। सोचिए 10 L बनाने पर कितनी तिलियों की आवश्यकता होगी?

इसे $2L = 2 \times 10 = 20$ से आसानी से ज्ञात कर सकते है।

हम जैसे 2 L की संख्या बदलते हैं, आवश्यक तीलियों की संख्या भी बदलती है। इस प्रकार L के प्रत्येक मान के लिए तीलियों की संख्या बदलेगी, जिसे चर राशि (Variable) कहते हैं। चर का अर्थ है विचरण करने वाला अर्थात् जो अलग–अलग मान ग्रहण कर सकते हैं।

चर तथा अचर राशियों से युक्त पद जैसे $x+2$, $3y+4$ आदि बीजीय व्यजंक हैं।

समस्या के अनुसार हम इन्हें बना सकते हैं। जैसे –

किसी संख्या में 3 जोड़ने पर $x+3$

किसी संख्या के दुगुने में से 2 घटाने पर $2y-2$

किसी संख्या के आधे में 1 जोड़ने पर $\frac{n}{2}+1$

अतः बीजीय पदों का संयोजन करने पर बीजीय व्यजंक प्राप्त होते हैं।

17.2 बीजीय व्यंजक के पद किसी भी बीजीय व्यंजक के छोटे–छोटे भाग होते है। जैसे – हम $5x+3$ पर विचार करते हैं। इसमें पहले हम 5 व x का गुणा करके $5x$ बनाते हैं और फिर हम इसमें 3 जोड़ते हैं। इसी प्रकार $3x^2 + 2y$ में x को x से गुणा किया जिसे 3 से गुणा करके $3x^2$ बनाया तथा 2 को y से गुणा करके $2y$ बनाया फिर दोनों पदों को जोड़ दिया।

व्यंजक के यह छोटे–छोटे भाग जो पहले अलग–अलग बनाए जाते हैं और फिर इन्हें जोड़ दिया जाता है। ये व्यंजक के पद कहलाते हैं।

नीचे दिए गए कथनों के आधार पर बीजीय व्यंजक बताइए।

कथन	**व्यंजक**
किसी संख्या में 8 जोड़ना	————————
किसी संख्या के दुगुने में से 3 घटाना	————————
किसी संख्या के चार गुने में 5 जोड़ना	————————

17.2.1 गुणांक किसी पद के किन्हीं भी गुणनखण्डों के गुणांक उस पद के शेष गुणनखण्डों के गुणनफल के बराबर होता है।

गुणांक बीजीय एवं संख्यात्मक दोनों ही प्रकार के हो सकते हैं।

$5xy$ में xy का गुणांक $= 5$

$5xy$ में x का गुणांक $= 5y$

तथा $5xy$ में y का गुणांक $= 5x$

जब किसी पद का गुणांक +1 होता है तो हम उसे नहीं लिखते हैं जैसे x^2 में x^2 का गुणांक +1 है तथा $-x^2$ में x^2 का गुणांक (-1) है।

17.2.2 समान एवं असमान पद जब पदों के बीजीय गुणनखण्ड एक जैसे ही हो तो वे पद समान कहलाते है, जब पदों के बीजीय गुणनखण्ड भिन्न–भिन्न हो तो वे असमान पद कहलाते हैं।

जैसे – $5xy + 3x + 4xy + 7$ में $5xy$ तथा $4xy$ समान पद हैं क्योंकि इनके बीजीय गुणनखण्ड समान हैं।

नोट : योग एवं घटाव की संक्रिया समान पदों में ही की जाती है अन्यथा इन्हें योग या घटाव के चिह्न के साथ उसी प्रकार लिख देते हैं।

17.3 बीजीय व्यंजकों के नियम

क्रमविनिमेयता (i) योग में – हम जानते है कि किन्हीं भी दो पूर्ण संख्याओं का योग क्रम विनिमेय होता है अर्थात् क्रम बदलने से उसके मान में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

$$5 + 2 = 2 + 5$$

इसी प्रकार बीजीय पद भी क्रम विनिमेयता का पालन करता है।

$$x + y = y + x$$

(ii) गुणन में भी क्रमविनमेयता का पालन होता है

$$x \times y = y \times x$$

समान पदों को जोड़ना एवं घटाना – यदि हम 2 पेन्सिल और 3 पेन्सिल को जोड़ें तो कुल 5 पेन्सिल प्राप्त होगी परन्तु यदि 2 पेन्सिल और 3 पेन जोड़ना चाहें तो क्या हम इन्हें जोड़ सकते हैं ? नहीं।

हमें योग अथवा घटाव के लिए समान राशि या वस्तुओं की आवश्यकता होती है। इसी प्रकार बीजीय व्यंजकों में भी समान चर वाले पद ही (समान पद) जोड़े अथवा घटाए जा सकते हैं।

जैसे – $4x^2y + 2x^2y = 6x^2y$

तथा $7xy^2 - 2xy^2 = 5xy^2$ होगा।

यदि पद समान हो तो उनके संख्यात्मक गुणांकों को जोड़कर अथवा घटाकर चर राशियों को उसी प्रकार लिख देते हैं। असमान पदों को जोड़ा अथवा घटाया नहीं जा सकता है। अर्थात् यदि x में 5 को जोड़ा जाए तो इसे $x + 5$ ही लिखेंगे तथा xy में से यदि $5y$ घटाया जाए तो इसे $xy - 5y$ ही लिखेंगे।

उदाहरण 1 $3x + 5xy$ में $3x + 2xy$ को जोड़िए।

$(3x + 5xy) + (3x + 2xy)$

$(3x + 3x) + (5xy + 2xy)$

$= 6x + 7xy$

उदाहरण 2 $11xy - 5m^2$ में से $3m^2 - 2xy$ को घटाइए।

$(11xy - 5m^2) - (3m^2 - 2xy)$

$= 11xy - 5m^2 - 3m^2 + 2xy$

$= (11xy + 2xy) - (5m^2 + 3m^2)$

$= 13xy - 8m^2$

17.4 किसी बीजीय व्यंजक का मान ज्ञात करना

एक बीजीय व्यंजक का मान उस व्यंजक को बनाने वाले चरों के मानों पर निर्भर करता है।

उदाहरण 3 दिए गए व्यंजकों के मान $x = 3$ के लिए ज्ञात कीजिए।

(i) $x + 5$ (ii) $4x^2 + 2x - 3$

(i) $x + 5$ में $x = 3$ रखने पर

$3 + 5$

$= 8$

(ii) $4x^2 + 2x - 3$ में $x = 3$ रखने पर

$4(3)^2 + 2(3) - 3$

$= 4 \times 9 + 6 - 3$

$= 36 + 6 - 3$

$= 42 - 3 = 39$

प्रश्नावली 17

1. नीचे दिए व्यंजकों के गुणांक ज्ञात कीजिए।

   (i) $5x^2yz$ में x^2 का गुणांक

   (ii) $3\,xy^2$ में x का गुणांक

   (iii) $4\,xyz$ में yz का गुणांक

2. निम्न तालिका को पूर्ण कीजिए।

x	1	2	3	4	----	---	10
$2x + 1$	3	5	---	----	13	17	----

3. निम्न स्थितियों के लिए बीजीय व्यंजक लिखिए।

   (i) a में 7 जोड़ना (ii) b के दुगुने में से 5 घटाना

   (iii) x में 4 का गुणा कर 2 जोड़ना (iv) y में 3 का भाग

4. निम्न को हल कीजिए।

   (i) $5xy + y^2$ में $3xy + y^2$ को जोड़िए।

   (ii) $3xy^2 + 5x - y$ में $3xy^2 + y$ को जोड़िए।

   (iii) $5x^2 - 3x$ में से $3x^2 - 2x$ को घटाइए।

5. दिए गए व्यंजकों का मान $y = 2$ पर ज्ञात कीजिए।

   (i) $3y^2 + 2y$ *(ii)* $y + 4$

   (iii) $2y + 7$ *(iv)* $2y^2 + 7y - 3$

अध्याय 18

सरल समीकरण

18.1 हमने पिछले अध्याय में बीजीय व्यंजकों के बारे में पढ़ा है।

जैसे – $3x^2y$, $3p$, $2x + 4$ आदि

इस अध्याय में सरल समीकरण के बारे में अध्ययन करेंगे।

जैसे – $3+x = 5$, $2x = 10$, $\frac{x}{5} = 4$ आदि।

समीकरण में दोनों पक्षों का संख्यात्मक मान बराबर होता है।

18.2 समीकरण को हल करना समीकरण को हल करने का अर्थ है दोनों पक्षों के बराबर होने के लिए चर राशि का मान क्या होना चाहिए। अर्थात्

$$x + 1 = 5$$

समीकरण में चर x में 1 जोड़ने पर परिणाम 5 आता है। अर्थात् $x = 4$ होगा।

समीकरण को हल करने के लिए हम एक पक्ष में केवल चर राशि व दूसरे पक्ष में अचर राशि प्राप्त करते हैं।

1. **तुला विधि** तुला विधि द्वारा समीकरण हल करने के लिए हम निम्न चरण कर सकते हैं –

   1. दोनों पक्षों में एक ही संख्या को जोड़ना अथवा घटाना।
   2. दोनों पक्षों में एक ही शून्येतर संख्या का गुणा अथवा भाग करना।

उदाहरण 1 समीकरण $3x-7 = 5$ को हल कीजिए।

$3x - 7 = 5$

दोनों पक्षों में 7 जोड़ने पर

$3x - 7 + 7 = 5 + 7$

$3x = 12$

दोनों पक्षों में 3 से भाग देने पर

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$$

$x = 4$

उत्तर की जाँच – जाँच के लिए प्राप्त हल को समीकरण में रखकर देखेंगे की दोनों पक्षों का मान बराबर है अथवा नहीं।

समीकरण $3x - 7 = 5$ में $x = 4$ रखेंगे।

$3 \times 4 - 7 = 5$

$12 - 7 = 5$

$5 = 5$ दोनों पक्ष बराबर है, अतः हल सही है।

2. **पक्षान्तरण विधि** – इस विधि में हम किसी भी पद को चिह्न बदलकर दूसरे पक्ष में ले जाते हैं तथा चर के गुणांक को दूसरे पक्ष में ले जा कर गुणा अथवा भाग करते हैं।

उदाहरण 2 समीकरण $5x + 2 = 17$ को हल कीजिए।

$5x + 2 = 17$

$5x = 17 - 2$ (2 के पक्षान्तरण से)

$5x = 15$

$x = \frac{15}{5}$ (गुणांक 5 के पक्षान्तरण से)

$x = 3$

उदाहरण 3 समीकरण $2x + 8 = 12$ को हल कीजिए।

$2x + 8 = 12$

$2x = 12 - 8$ (8 के पक्षान्तरण से)

$2x = 4$

$x = \frac{4}{2}$ (गुणांक 2 के पक्षान्तरण से)

$x = 2$

उदाहरण 4 समीकरण $\frac{x}{2} + 1 = 4$ को हल कीजिए।

$\frac{x}{2} = 4 - 1$

$\frac{x}{2} = 3$

$x = 3 \times 2 = 6$

18.3 इबारती प्रश्नों को हल करना दी गई समस्या को ध्यानपूर्वक पढ़ें और देखें कि क्या दिया गया है तथा क्या ज्ञात करना है ?

अज्ञात राशि को चर राशि के रूप में लिखते हुए समीकरण लिखें तथा समीकरण हल करके अज्ञात राशि को ज्ञात कर समस्या का समाधान प्रस्तुत करें। अपने उत्तर की जाँच भी करें।

उदाहरण 5 किसी संख्या में 5 जोड़ने पर 20 प्राप्त होता है तो वह संख्या ज्ञात कीजिए।

माना कि अज्ञात संख्या x है।

प्रश्नानुसार $x + 5 = 20$

$x = 20 - 5$

$x = 15$

अतः वह संख्या 15 होगी।

उदाहरण 6 किसी संख्या के दुगुने में से 4 घटाने पर 20 प्राप्त होता है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

माना कि वह संख्या x है।

संख्या का दुगुना $= 2x$

प्रश्नानुसार $2x - 4 = 20$

$2x = 20 + 4$

$2x = 24$

$x = \frac{24}{2} = 12$

अभीष्ठ संख्या $= 12$ है।

उदाहरण 7 तीन क्रमागत संख्याओं का योग 27 है तो वे संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल माना प्रथम संख्या $= x$ है

तो अगली संख्याएँ क्रमशः $x + 1$ व $x + 2$ होगी।

प्रश्नानुसार $x + x + 1 + x + 2 = 27$

$3x + 3 = 27$

$3x = 27 - 3$

$3x = 24$

$x = \frac{24}{3} = 8$

अतः अभीष्ठ संख्याएँ $(8, 8 + 1, 8 + 2) = 8, 9, 10$ हैं।

प्रश्नावली 18

1. निम्न समीकरण हल कीजिए।

   (i) $2x + 1 = 9$ (ii) $3x - 4 = 20$

   (iii) $5x - 4 = 26$ (iv) $\frac{3y}{2} = \frac{2}{5}$

   (v) $3(n - 5) = 21$ (vi) $\frac{7x}{9} = 21$

2. दो क्रमागत संख्याओं का योग 17 है, वे संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

3. किसी संख्या के 3 गुना से 2 अधिक करने पर 20 आता है तो वह संख्या क्या होगी?

4. सलमा के पिता की आयु उसकी आयु के 4 गुने से 5 अधिक है, यदि उसके पिता की आयु 45 वर्ष है, सलमा की आयु ज्ञात कीजिए।

5. किसी संख्या के आधे में 1 जोड़ने पर 5 आता है तो वह संख्या ज्ञात कीजिए।

अध्याय 19

राशियों की तुलना

19.1 कालू के पास 10 रुपये हैं तथा आजाद के पास 20 रुपये हैं तो दोनों की तुलना करने में हम पाते हैं कि आजाद के पास कालू से 20–10=10 रुपये अधिक है परन्तु भीखा के पास 200 रुपये हैं तब तुलना करने पर उसके पास आजाद से 180 रुपये अधिक हैं ऐसा कहने से बेहतर हम निम्न प्रकार से तुलना करते हैं।

$$\frac{\text{भीखा के रुपये}}{\text{आजाद के रुपये}} = \frac{200}{20} = \frac{10}{1}$$

अतः हम कह सकते हैं भीखा के पास आजाद से 10 गुना रुपये हैं।

इस प्रकार की तुलना को अनुपात कहा जाता है।

19.1.1 अनुपात की अवधारणा

चिराग का वजन 25 किलोग्राम व उसके पिता का वजन 75 किलोग्राम है तो पिता का वजन पुत्र के वजन से कितना गुना है?

$$\frac{75 \text{ किलोग्राम}}{25 \text{ किलोग्राम}} = \frac{3}{1} \quad \text{अर्थात् 3 गुना है।}$$

इस उदाहरण में हमने राशियों की तुलना 'कितने गुनी' के रूप में की है। यह तुलना अनुपात कहलाती है तथा इसे '' : '' चिह्न द्वारा दर्शाते हैं।

विशेष – राशियों की तुलना करते समय राशियों की इकाई समान होना आवश्यक होता है, यदि ऐसा नहीं है तो पहले उन्हें समान बनाकर अनुपात निकाले।

उदाहरण 1 1 रुपये एवं 50 पैसे का अनुपात क्या होगा।

1 रुपया : 50 पैसे

100 पैसे : 50 पैसे

2 : 1

उदाहरण 2 कक्षा 7 में कुल 45 बच्चे पढ़ते हैं जिसमें से 25 लड़कियां एवं 20 लड़के हैं। निम्न अनुपात ज्ञात कीजिए।

(i) लड़कियों की संख्या का लड़कों की संख्या से

(ii) लड़कों की संख्या का लड़कियों की संख्या से

(iii) लड़कियों की संख्या का कुल बच्चों की संख्या से

हल –

(i) लड़कियों की संख्या : लड़कों की संख्या = 25 : 20 = 5 : 4

(ii) लड़कों की संख्या : लड़कियों की संख्या = 20 : 25 = 4 : 5

(iii) लड़कियों की संख्या : कुल बच्चों की संख्या = 25 : 45 = 5 : 9

19.1.2 विभिन्न परिस्थितियों में अनुपात

युसुफ एवं अशोक ने एक व्यापार शुरू किया और 4 : 5 में धन लगाया। एक वर्ष बाद उन्हें 45,000 रुपये का लाभ हुआ। लाभ बाँटते समय युसुफ ने कहा हम लाभ बराबर बाँट लेते हैं। तब अशोक ने कहा कि मुझे ज्यादा लाभ मिलना चाहिए। क्योंकि मैंने निवेश भी ज्यादा किया है तब निर्णय यह हुआ कि लाभ निवेश के अनुपात में बाँटा जाए।

यहाँ 45000 के कुल 9 (4 + 5) हिस्से होंगे।

युसुफ का हिस्सा = $\frac{45000}{9} \times 4 = 20000$ रुपये

अशोक का हिस्सा = $\frac{45000}{9} \times 5 = 25000$ रुपये

19.1.3 तुल्य अनुपात

ऐसे अनुपात जो सरलतम रूप से लाने पर एक जैसे अनुपात प्राप्त हों वे तुल्य अनुपात कहलाते हैं।

जैसे –

$$\frac{30}{20} = \frac{90}{40} = \frac{150}{100} = \frac{360}{240} = \text{—}$$

इन सभी का सरलतम रूप 3 : 2 है ये सभी तुल्य अनुपात हैं।

3 : 2 के दो तुल्य अनुपात इस प्रकार ज्ञात करते हैं।

$$\frac{3}{2} = \frac{3 \times 2}{2 \times 2} = \frac{6}{4}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{3 \times 3}{2 \times 3} = \frac{9}{6}$$

19.2 समानुपात

दिवाकर ने 15 रुपये में 3 पेन खरीदे तथा वीनू ने 50 रुपये के 10 पेन खरीदे मूल्य एवं पेन के अनुपात निकालने पर

15 : 3 तथा 50 : 10

5 : 1 तथा 5 : 1

अतः दोनों अनुपात एक समान हैं जब दो अनुपात एक समान हो तो वह समानुपात में कहलाते है, इन्हें (: :) अथवा (=) चिह्न के प्रयोग से दर्शाते हैं।

15 : 3 : : 50 : 10 अथवा 15 : 3 = 50 : 10

यदि कोई चार राशियाँ समानुपात में हो तो बाह्य पदों का गुणनफल सदैव मध्य पदों के गुणनफल के बराबर होता है।

बाह्य पद

15 : 3 : : 50 : 10

मध्य पद

15 × 10 = 3 × 50

150 = 150

उदाहरण 3 जाँच कीजिए कि 4 : 12 व 9 : 27 समानुपात में हैं अथवा नहीं ?

यदि 4 : 12 : : 9 : 27

तो बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल

4 × 27 = 12 × 9

108 = 108

अतः 4 : 12 तथा 9 : 27 समानुपात में हैं।

19.3 ऐकिक नियम

1. यदि 2 किलोग्राम आलू का मूल्य 30 रुपये है तो 5 किलो आलू का मूल्य कितना होगा?
2. मोहन साईकिल द्वारा 4 घण्टे में 40 किलोमीटर दूरी तय करता है तो वह 6 घण्टे में कितनी दूरी तय करेगा?

इन उदाहरणों को हल करने के लिए हमें पहले एक इकाई का मान जैसे उदाहरण 1 में एक किलो आलु का मूल्य निकालना होता है तथा इसकी सहायता से जितनी इकाइयों का मान चाहे ज्ञात कर सकते हैं। यह ऐकिक नियम कहलाता है।

पहले उदाहरण में 2 किलोग्राम आलू का मूल्य = 30 रुपये

अतः 1 कि.ग्रा. आलू का मूल्य = $\frac{30}{2}$ = 15 रुपये

यदि 5 कि.ग्रा. का मूल्य ज्ञात करना है तो 5 × 15 = 75 रुपये

इसी प्रकार दूसरे उदाहरण में मोहन 1 घण्टे में दूरी तय करेगा = $\frac{40}{4}$ = 10 कि.मी.

तो वह 6 घण्टे में तय करेगा = 6 × 10 = 60 कि.मी.

प्रश्नावली 19.1

1. वृक्षारोपण पखवाड़े में बच्चों ने 25 नीम के, 20 आम के और 15 पीपल के पौधे लगाएँ तो ज्ञात कीजिए।
   (i) नीम तथा आम के पौधे का अनुपात
   (ii) आम व पीपल के पौधे का अनुपात
2. निम्न में से कौन सी राशियाँ समानुपात में हैं ?
   (i) 8, 6, 48, 36 (ii) 12, 18, 20, 30
   (iii) 14, 20, 26, 32 (iv) 3, 4, 12, 36
3. एक दिन में 5 छात्र 25 पौधे लगाते है तो 8 छात्र एक दिन में कितने पौधे लगाएँगे?
4. यदि 4 कुर्सियों का मूल्य 1800 रुपये है तो ऐसी 10 कुर्सियों का मूल्य कितना होगा?

19.4 प्रतिशत

राधव व माधव दोनों बहस करते हैं कि मेरे अंक ज्यादा है और मेरा कक्षा में प्रथम स्थान है। राघव ने 100 में से 75 अंक व माधव के 120 में से 96 अंक प्राप्त किए। दोनों अपने बड़े भाई के पास जाते हैं और फैसला करवाते हैं।

राधव के अंक = $\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

माधव के अंक = $\frac{96}{120} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

दोनों के हर समान करते हैं

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{5} = \frac{15}{20}, \quad \frac{4}{5} \times \frac{4}{4} = \frac{16}{20}$$

अब यदि यह देखना हो कि प्रत्येक को 100 अंक में से कितने अंक प्राप्त हुए तो

$$\frac{15}{20} \times \frac{5}{5} = \frac{75}{100}, \quad \frac{16}{20} \times \frac{5}{5} = \frac{80}{100}$$

$$\frac{80}{100} > \frac{75}{100}$$

अतः दोनों के पूर्णांक 100 हैं तो राधव के 75 व माधव ने 80 अंक प्राप्त किये। अतः माधव के अंक ज्यादा है। प्रत्येक 100 का अर्थ प्रतिशत कहलाता है प्रतिशत को % से प्रदर्शित किया जाता है। हर में यदि 100 है तो भिन्न का अंश ही प्रतिशत को व्यक्त करता है।

19.4.1 भिन्न को प्रतिशत में बदलना यदि किसी भिन्न को प्रतिशत में बदलना है तो भिन्न को 100 से गुणा करते हैं। सरल करने पर प्राप्त परिणाम प्रतिशत कहलाता है।

जैसे – (i) $\frac{5}{8}$ को प्रतिशत में बदलिए।

$$= \frac{5}{8} \times 100 = \frac{500}{8} = 62.5\%$$

(ii) $\frac{3}{25}$ को प्रतिशत में बदलिए।

$$= \frac{3}{25} \times 100 = \frac{300}{25} = 12\%$$

19.4.2 प्रतिशत को भिन्न में बदलना

इसके लिए % का चिह्न हटाकर $\frac{1}{100}$ का गुणा करते हैं।

जैसे (i) 15 % को भिन्न में बदलिए।

$$= 15 \times \frac{1}{100} = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$$

(ii) 36 % को भिन्न में बदलिए।

$$= 36 \times \frac{1}{100} = \frac{36}{100} = \frac{9}{25}$$

19.4.3 प्रतिशत को दशमलव भिन्न में बदलना

इसके लिए भी % को हटा कर $\frac{1}{100}$ से गुणा करते हैं, प्राप्त गुणनफल को सरल करके दशमलव भिन्न में बदलते हैं।

जैसे – (i) 3 % को दशमलव भिन्न में बदलिए।

$$3\% = 3 \times \frac{1}{100} = \frac{3}{100} = .03$$

(ii) $1\frac{2}{5}$ % को दशमलव भिन्न में बदलिए।

$$1\frac{2}{5}\% = \frac{7}{5}\% = \frac{7}{5} \times \frac{1}{100} = \frac{7}{500} = 0.014$$

19.4.4 दशमलव भिन्न को प्रतिशत में बदलना

इसके लिए दशमलव भिन्न का 100 % से गुणा करते हैं।

जैसे – (i) 0.6 को प्रतिशत में बदलिए।

$= 0.6 \times 100\ \% = \frac{0.6}{10} \times 100\% = \frac{0.6}{10} \times 100\ \%$

$= 60\ \%$

(ii) 0.225 को प्रतिशत में बदलिए।

$= 0.225 \times 100\ \%$

$= \frac{0.225}{1000} \times 100 = \frac{225}{1000} \times 100\ \%$

$= \frac{225\%}{10} = 22.5\ \%$

(iii) 50 का 22% ज्ञात कीजिए।

$= 50 \times \frac{22}{100} = \frac{1100}{100} = 11\%$

प्रश्नावली 19.2

1. भिन्न संख्याओं को प्रतिशत में बदलिए।

   (i) $\frac{14}{15}$ (ii) $3\frac{1}{3}$

2. दशमलव भिन्नों को प्रतिशत में बदलिए।

   (i) 1. 25 (ii) 0. 001

3. प्रतिशत को साधारण भिन्न में बदलिए।

   (i) 52 % (ii) $6\frac{1}{4}\%$ (iii) $33\frac{1}{3}\%$

4. ज्ञात कीजिए।

(i) 320 का 15 % (ii) 32. 5 मीटर का 16%

5. प्रतिशत को दशमलव भिन्न में बदलिए।

(i) 7 % (ii) 16. 7 % (iii) $1\frac{2}{5}$ %

6. एक विद्यालय में 500 विद्यार्थियों में 85% लड़कियाँ हैं। विद्यालय में लड़कों की संख्या ज्ञात कीजिए।

7. शिवड़िया विद्यालय में पर्यावरण सुरक्षा हेतु पेड़ लगाए गए जिसमें से 10% पेड़ सूख गए यदि अब यहाँ 180 पेड़ बचे तो ज्ञात कीजिए प्रारम्भ में कुल कितने पेड़ लगाए थे।

19.5 प्रतिशत वृद्धि – प्रतिशत ह्रास

इस सारणी को देखने से स्पष्ट पता चलता है कि कहाँ वृद्धि हुई, कहाँ ह्रास हुआ ?

वस्तु	भाव में परिवर्तन		परिवर्तन	प्रतिशत में
	बाद का मान	पहले का मान		
चीनी	27	30	–3	– 10%
मूंगफली तेल	81	90	–9	– 10%
गेहूँ	15	13	2	$15\frac{5}{13}$ %
परमल चावल	32	28	4	$14\frac{2}{7}$%

$$\text{भाव में परिवर्तन प्रतिशत में} = \frac{\text{परिवर्तन}}{\text{पहले का मान}} \times 100$$

चीनी $= \frac{3}{30} \times 100 = -10\ \%$

मूँगफली तेल $= \frac{9}{90} \times 100 = -10\ \%$

गेहूँ $= \frac{2}{13} \times 100 = 15\ \frac{3}{15}\ \%$

चावल $= \frac{4}{28} \times 100 = 14\ \frac{2}{7}\ \%$

अतः चीनी तथा मूँगफली तेल में ह्रास प्रतिशत समान है इसी प्रकार गेहूँ के भाव में प्रतिशत वृद्धि चावल से ज्यादा है।

अभ्यास

1. किसी गाँव की जनसंख्या पिछले 10 वर्षों में 12000 से बढ़कर 15000 हो गई है तो जनसंख्या बढ़ने का प्रतिशत कितना रहा ?

19.6 लाभ – हानि

– जिस मूल्य में वस्तु खरीदी जाती है वह मूल्य वस्तु का क्रयमूल्य कहलाता है।

– जिस मूल्य में वस्तु बेची जाती है वह मूल्य वस्तु का विक्रय मूल्य कहलाता है।

– कम मूल्य में खरीद कर ज्यादा में बेचा तो लाभ अर्थात् क्र. मू. < वि. मू.।

– ज्यादा मूल्य में खरीद कर कम में बेचा तो हानि अर्थात् क्र. मू. > वि. मू.।

अर्थात् लाभ = वि. मू. – क्र. मू.

तथा हानि = क्र. मू. – वि. मू..

19.6.1 प्रतिशत लाभ–हानि ज्ञात करना प्रतिशत लाभ–हानि सदैव क्र. मू. पर ही ज्ञात करते हैं।

अत :

$$\% \text{ लाभ} = \frac{\text{लाभ}}{\text{क्र. मू.}} \times 100$$

$$\% \text{ हानि} = \frac{\text{हानि}}{\text{क्र. मू.}} \times 100$$

किसी वस्तु का विक्रय मूल्य निर्धारित करने के लिए सबसे पहले क्र.मू. में अतिरिक्त खर्च जैसे किराया माल ढुलाई, हमाली आदि जोड़कर कुल क्र. मू. ज्ञात किया जाता है।

उदाहरण 4 रहीम ने एक मकान 1,40,000 रुपये में खरीदा। मकान के रजिस्ट्रेशन दलाली आदि पर 14000 रु., नल लगवाने के 7000 रुपये, बिजली ठीक करवाने के 1700 रु. एवं मरम्मत में 8300 रु. खर्च हुए। अब यदि वह मकान के 2,03,490 रुपये में बेच देता है तो उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

रहीम ने मकान खरीदा	=	1,40,000 रुपये
मकान के रजिस्ट्रेशन	=	14,000 रुपये
नल लगवाने के	=	7,000 रुपये
बिजली ठीक करवाने के	=	1,700 रुपये
अन्य मरम्मत	=	8,300 रुपये

कुल ऊपरी व्यय = 14000 + 7000 + 1700 + 8300 = 31000 रुपये

मकान का वास्तविक क्रय मूल्य = 140000 + 31000 = 171000 रुपये

मकान का विक्रय मूल्य = 203490 रुपये

लाभ = विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य (वास्तविक)

= 203490 – 171000 रुपये

= 32490 रुपये

$$\text{लाभ प्रतिशत} = \frac{\text{लाभ}}{\text{क्र.मू.}} \times 100$$

$$= \frac{32490}{171000} \times 100 \qquad = \frac{3249}{171} = 19\%$$

अतः लाभ प्रतिशत = 19%

19.7 सरल ब्याज

उमेश अपना मकान बनाने हेतु किसी संस्था से 100000 रुपये उधार लेता है। यह उधार ली गई राशि मूलधन कहलाती है। वह 1 वर्ष पश्चात् 110000 रुपये उस संस्था को चुकाता है। अतः उमेश ने 100000 रुपये पर अतिरिक्त 10000 रुपये चुकाए।

यह अतिरिक्त राशि ही ब्याज कहलाती है।

ब्याज राशि निम्नलिखित पर निर्भर करती है –

(i) उधार ली गई / दी गई राशि (मूलधन)

(ii) समय (जिस अवधि के लिए राशि उधार ली गई)

(iii) दर (प्रति सैंकड़ा पर दी गई अतिरिक्त धन राशि) जो कि प्रतिवर्ष / प्रतिमाह आदि पर निर्धारित होती है।

निर्धारित अवधि के बाद मूलधन तथा ब्याज दोनों को मिलाकर जो राशि चुकाई जाती है, उसे मिश्रधन कहते हैं।

मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

सरल ब्याज को निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

सरल ब्याज = मूलधन × समय × दर प्रति सैंकड़ा

$$\text{सरल ब्याज} = \text{मूलधन} \times \text{समय} \times \frac{\text{दर}}{100}$$

उदाहरण 5 कर्मा ने राष्ट्रीयकृत बैंक से 10000 रुपये 10 प्रतिशत सरल ब्याज की दर से 3 वर्ष के लिए धन उधार लिए तो उसे कितने रुपये ब्याज के देने पड़ेंगे एवं कुल कितना धन वापस लौटाना पड़ेगा?

(i) उधार लिया गया धन (मूल धन) = 10000 रुपये

ब्याज की दर = 10%, समय = 3 वर्ष

100 रुपये का 1 वर्ष का ब्याज = 10 रुपये

तो 1 रुपये का 1 वर्ष का ब्याज $= \frac{10}{100}$ रुपये

तो 10000 रुपये का 1 वर्ष का ब्याज $= \frac{10}{100} \times 10000$ रुपये

तो 10000 रुपये का 3 वर्ष का ब्याज $= \frac{10}{100} \times 10000 \times 3$ रुपये

सरल ब्याज $= \frac{10}{100} \times 10000 \times 3$

= 3000 रुपये

ब्याज सहित लौटाया गया धन मिश्रधन = लिया गया धन या मूलधन + ब्याज

= 10000 + 3000

= 13000 रुपये

(ii) अथवा सरल ब्याज $= \text{मूलधन} \times \text{समय} \times \frac{\text{दर}}{100}$

$= \frac{10000 \times 3 \times 10}{100}$

= 3000 रुपये

मिश्रधन = मूल धन + ब्याज

= 10000 + 3000

= 13000 रुपये

उदाहरण 6 कलाम ने 8% वार्षिक दर से 1 वर्ष पश्चात् 320 रुपये ब्याज के रूप में दिए हो तो उसने कितना धन उधार लिया था?

दिया हुआ है दर = 8%, समय = 1 वर्ष, ब्याज = 320 रुपये, मूलधन = ?

सरल ब्याज $= \frac{\text{मूलधन} \times \text{समय} \times \text{दर}}{100}$

$320 = \frac{\text{मूलधन} \times 1 \times 8}{100}$

$$320 = \frac{\text{मूलधन} \times 8}{100}$$

$$\text{मूलधन} \times 8 = 320 \times 100$$

$$\text{मूलधन} = \frac{320 \times 100}{8}$$

$$\text{मूलधन} = 4000 \text{ रुपये}$$

प्रश्नावली 19.3

1. एक नगर की जनसंख्या 25000 से बढ़कर 26500 हो जाती है तो जनसंख्या में प्रतिशत वृद्धि ज्ञात कीजिए।

2. एक फुटबॉल क्लब ने इस वर्ष 12 मैचों में जीत प्राप्त की, जबकि पिछले वर्ष 15 मैचों में जीती थी। पिछले वर्ष की तुलना में जीत में कितने प्रतिशत वृद्धि या कमी हुई ?

3. पन्ना सिलाई मशीन खरीदने हेतु महिला कॉपरेटिव बैंक से 5000 रुपये का ऋण 12% वार्षिक ब्याज की दर से लेती है। ज्ञात कीजिए कि 1 वर्ष में पन्ना को कितना धन वापस करना होगा।

4. 4500 रुपये पर 2 वर्ष पश्चात् किस दर से 360 रुपये साधारण ब्याज देय होगा?

अध्याय 20

परिमाप एवं क्षेत्रफल

20.1 भाग (अ) में हमनें वर्ग एवं आयत के परिमाप एवं क्षेत्रफल निकालना सीखा। यहाँ पर हम अलग–अलग प्रकार के बहुभुजों के परिमाप एवं क्षेत्रफल ज्ञात करना सीखेंगे।

20.2.1 समबहुभुज का परिमाप

यदि सभी भुजाएँ समान हो व सभी कोण समान हो वे आकृतियाँ समबहुभुज कहलाती है।

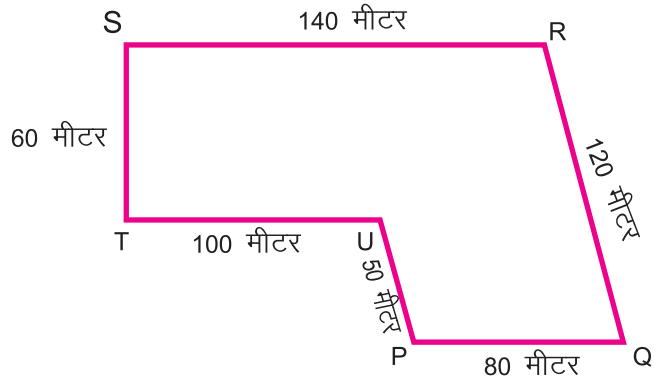
अतः समबहुभुज का परिमाप = भुजाओं की संख्या × भुजा की लम्बाई

वर्ग एक समबहुभुज है।

अतः वर्ग का परिमाप = 4 × भुजा की लम्बाई।

20.2.2 वे आकृतियाँ जो समबहुभुज नहीं है उन आकृतियों का परिमाप

दी गई आकृति का परिमाप ज्ञात कीजिए।



सर्व प्रथम परिमाप ज्ञात करने के लिए लम्बाईयों की इकाई समान होना आवश्यक है।

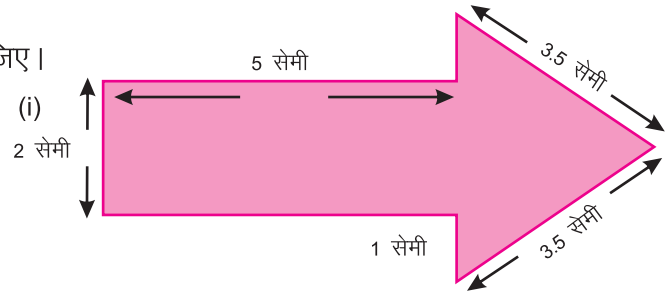
परिमाप = ST + TU + UP + PQ + QR + RS

= 60 + 100 + 50 + 80 + 120 + 140

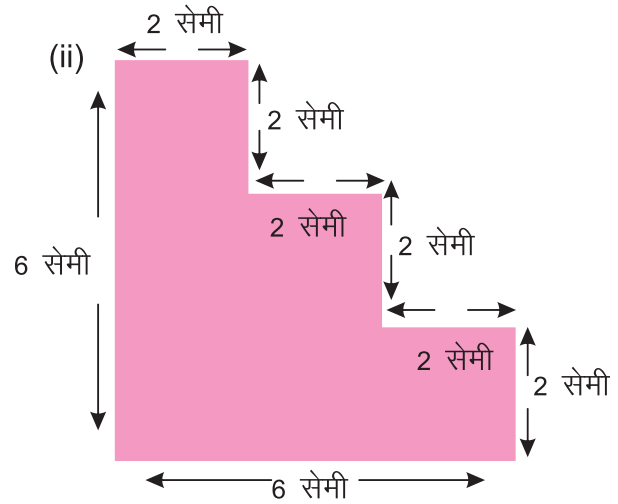
= 550 मीटर

नीचे दी गई आकृतियों का परिमाप ज्ञात कीजिए।

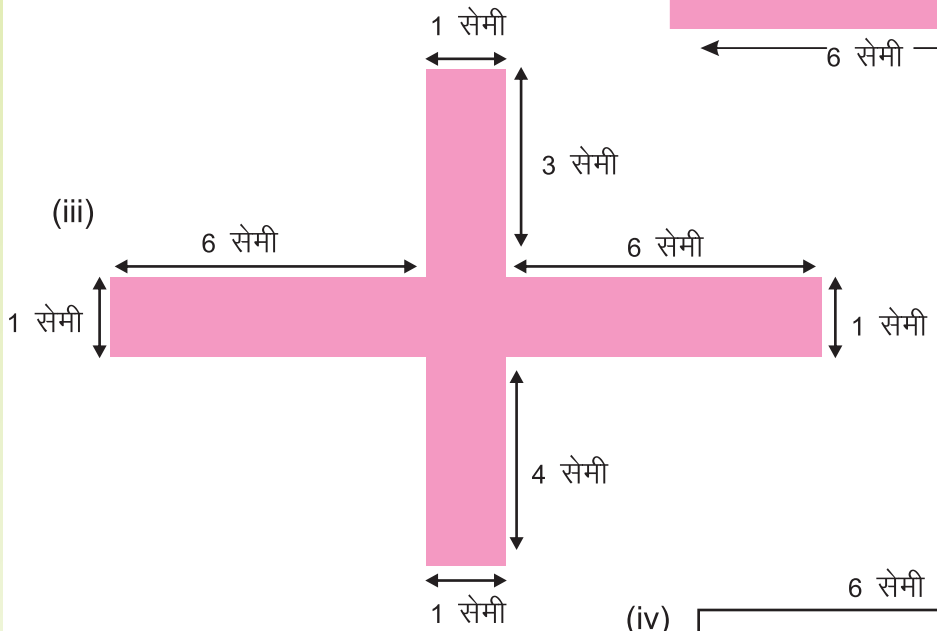
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

आयत में आमने सामने की भुजाएँ बराबर होती हैं। अतः आयत का परिमाप = लम्बाई + चौड़ाई + लम्बाई + चौड़ाई

= 2 × (लम्बाई) + 2 × (चौड़ाई)

= 2 × (लम्बाई + चौड़ाई)

उदाहरण 1 फुटबॉल के मैदान का परिमाप 270 मीटर है यदि मैदान की लम्बाई 90 मीटर है तो मैदान की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

परिमाप = 270 मीटर, मैदान की लम्बाई = 90 मीटर

मैदान का परिमाप = 2 (लम्बाई + चौड़ाई)

270 = 2 (90 + चौड़ाई)

270 = 180 + 2 × चौड़ाई

90 = = 2 × चौड़ाई

चौड़ाई = 90 ÷ 2

चौड़ाई = 45 मीटर

20.3 क्षेत्रफल

हम भाग अ में आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कर चुके है।

आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

20.3.1 वर्ग का क्षेत्रफल हम जानते है कि किसी आयत की लम्बाई व चौड़ाई समान होने पर वह वर्ग बन जाता है।

अतः वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

20.3.2 क्षेत्रफल की इकाई

क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए दो समान इकाइयों का गुणा किया जाता है तथा इसकी इकाई वर्ग इकाई के रूप में लिखी जाती है।

जैसे – सेमी × सेमी = वर्ग सेमी (सेमी^{2})

मीटर × मीटर = वर्ग मीटर (मी^{2})

इकाइयाँ असमान होने पर इकाइयों को समान किया जाता है।

उदाहरण 2 दिए गए आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

6 सेमी

2 सेमी

आयत की लम्बाई = 6 सेमी

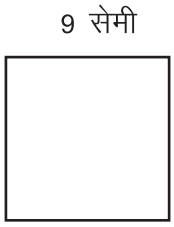
आयत की चौड़ाई = 2 सेमी

आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौडाई

= 6 सेमी x 2 सेमी

= 12 सेमी^{2}

उदाहरण 3 एक वर्गाकार फ्रेम का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी एक भुजा 9 सेमी है।



हल वर्ग की भुजा = 9 सेमी

वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

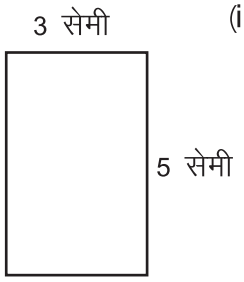
= 9 सेमी × 9 सेमी

= 81 वर्ग सेमी

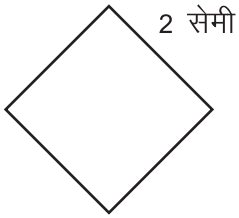
प्रश्नावली 20.1

1. दी गई आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

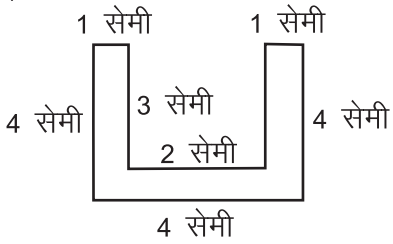
(i)



(ii)



(iii)



2. एक कमरे की लम्बाई 10 मीटर व चौड़ाई 8 मीटर है उसके फर्श को ढ़कने के लिए कितने वर्ग मीटर कालीन की आवश्यकता होगी ?

3. एक वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल 225 वर्ग मीटर है, उसकी एक भुजा की लम्बाई बताइए।

4. यदि खेत की लम्बाई 23 मीटर व चौड़ाई 15.5 मी. है, खेत के चारों ओर तारबन्दी के लिए कितने लम्बे तार की आवश्यकता होगी ? यदि तार का मूल्य 10 रू. प्रति मीटर हो तो मूल्य ज्ञात कीजिए।

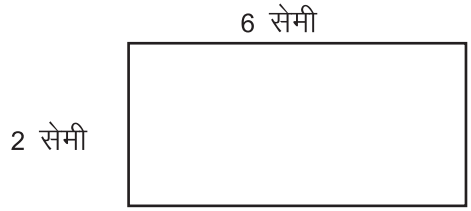
20.4 परिमाप और क्षेत्रफल

विभिन्न आकृतियों का हमें परिस्थिति एवं आवश्यकता के अनुसार परिमाप अथवा क्षेत्रफल ज्ञात करना होता है।

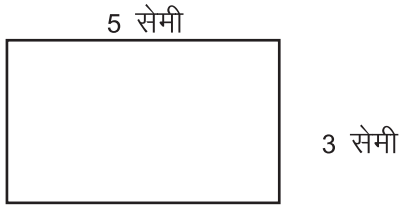
जैसे किसी खेत की चारो तरफ बाड़ लगवाने का व्यय जानना चाहते हैं तो हमें उस खेत का परिमाप ज्ञात करना पड़ेगा जबकि उसी खेत की जुताई का व्यय जानना चाहते हैं तो हमें उसे खेत के क्षेत्रफल की गणना करनी होगी।

20.4.1 परिमाप और क्षेत्रफल में संबंध

आकृतियों का परिमाप समान होने पर जरूरी नहीं कि क्षेत्रफल भी समान ही प्राप्त होता है। जैसे नीचे दो आयताकार आकृति में देखें –



(i)



(ii)

आकृति (i) का परिमाप = 2 × (ल. + चौ)
= 2 × (6+2)
= 2 × 8
= 16 सेमी

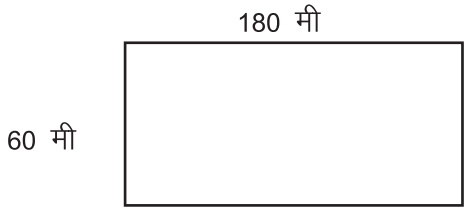
आकृति (ii) का परिमाप
= 2 × (ल.+चौ.)
= 2 × (5 + 3)
= 2 × 8
= 16 सेमी

आकृति (i) का क्षेत्रफल = ल. × चौ.
= 6 सेमी × 2 सेमी
= 12 वर्ग सेमी

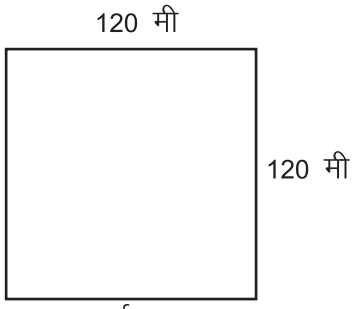
आकृति (ii) का क्षेत्रफल = ल. × चौ.
= 5 × 3
= 15 वर्ग सेमी

अतः स्पष्ट है कि समान परिमाप वाली आयताकार आकृतियों का क्षेत्रफल भिन्न–भिन्न भी प्राप्त हो सकता है।

14.4.2 आयत और वर्गाकार आकृतियों में परिमाप समान रखने पर



आयताकार



वर्गाकार

आयत का परिमाप = 2 x (ल + चौ.)
= 2 x (180 मी. + 60 मी.)
= 2 x (240 मी)
= 480 मी.

वर्ग का परिमाप = 4 x भुजा
= 4 x 120 मी.
= 480 मी.

आयत का क्षेत्रफल = ल. x चौ.
= 180 मी. x 60 मी.
= 10,800 वर्ग मीटर

वर्ग का क्षेत्रफल = $(\text{भुजा})^2$
= $(120)^2$
= 14,400 वर्ग मीटर

अतः स्पष्ट है कि समान परिमाप होने पर क्षेत्रफल भिन्न भी प्राप्त हो सकता है।

प्रश्नावली 20.2

1. निम्नलिखित परिस्थितियों में बताइए कि कब परिमाप तथा कब क्षेत्रफल ज्ञात करना पड़ेगा ?

   (i) दुपट्टे के किनारो पर लेस (चमकीकी कोर) लगानी है।

   (ii) हॉकी के मैदान में काली मिट्टी डलवानी है।

   (iiii) कमरे की छत भरवानी है।

   (iv) विद्यालय के चारों ओर चार दीवारी बनवानी है।

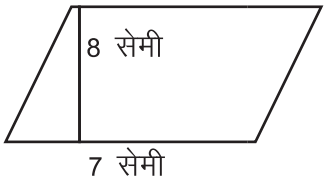
2. एक आयत व वर्ग का परिमाप समान है, आयत की लम्बाई 25 सेमी तथा चौड़ाई 15 सेमी है। किस आकृति का क्षेत्रफल अधिक होगा ?

20.5 समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

आयत की तरह समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समान्तर एवं बराबर होती है परंतु चारों कोण बराबर नहीं होते हैं।

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = (आधार × ऊँचाई) वर्ग इकाई

उदाहरण 4 एक समान्तर चतुर्भुज का आधार 7 सेमी तथा ऊँचाई 8 सेमी है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



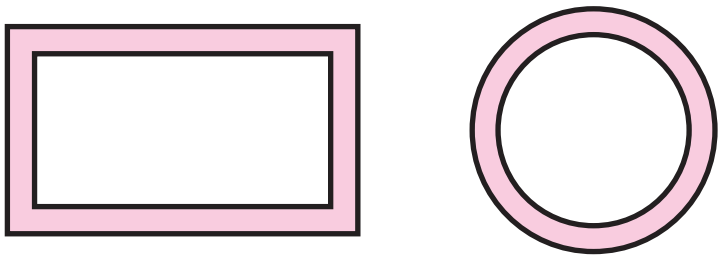
हल समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई
= 7 सेमी × 8 सेमी
= 56 वर्ग सेमी

20.6 पथ/मार्ग का क्षेत्रफल

जीवन में कई बार ऐसी स्थितियाँ देखने में आती है जिसमें आयताकार, वर्गाकार या वृत्ताकार पार्क, मैदान आदि के चारों तरफ अन्दर या बाहर मार्ग बना होता है।

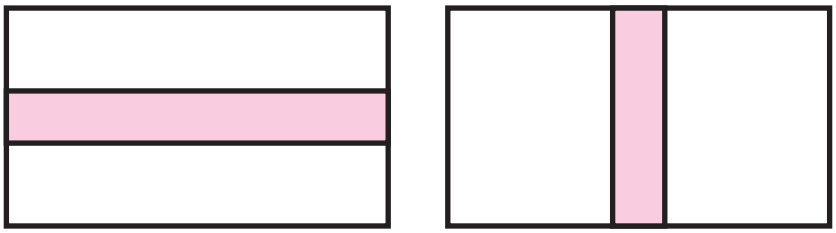
ऐसे मार्ग/पथ का क्षेत्रफल निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते है।

1. **दिए गए आयताकार, वर्गाकार या वृत्ताकार भाग के चारों तरफ बने मार्ग का क्षेत्रफल**



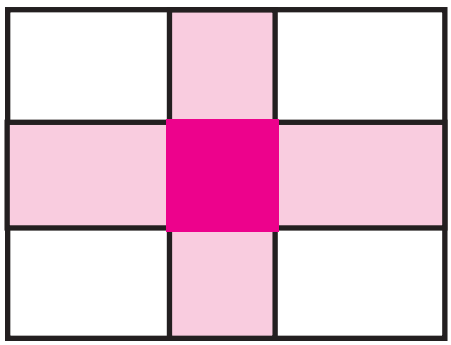
मार्ग का क्षेत्रफल = (मार्ग सहित क्षेत्रफल – मार्ग रहित भाग का क्षेत्रफल)

2. **लम्बाई / चौड़ाई के समान्तर बीचों – बीच अथवा किनारे पर बने मार्ग का क्षेत्रफल**

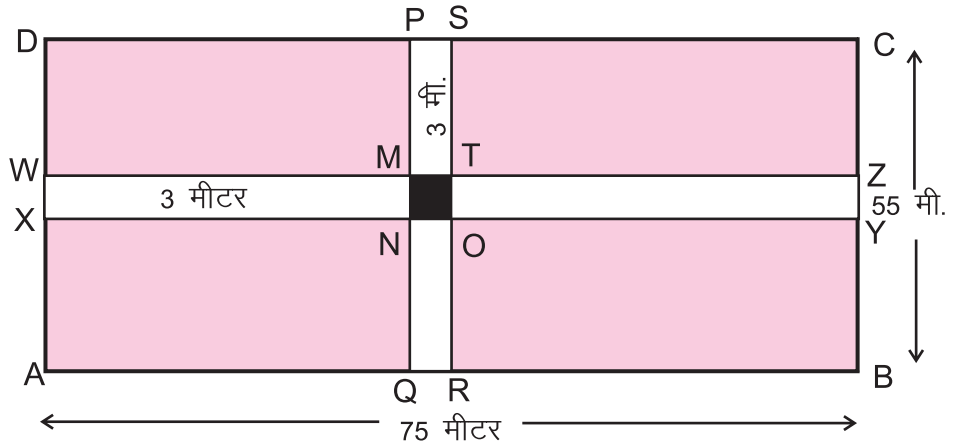


मार्ग का क्षेत्रफल = समान्तर भुजा की लम्बाई × मार्ग की चौड़ाई

3. **लम्बाई एवं चौड़ाई के समान्तर परस्पर काटने वाले मार्गों का क्षेत्रफल = मार्गों का क्षेत्रफल – उभयनिष्ठ भाग का क्षेत्रफल**



उदाहरण 5 एक आयताकार घास के मैदान की ल. 75 मीटर और चौ. 55 मी. है। मैदान के मध्य लम्बाई व चौड़ाई के समान्तर 3 मीटर चौड़े दो मार्ग इस प्रकार स्थित है कि प्रत्येक एक–दूसरे को समकोण पर काटते हैं। सम्पूर्ण मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



ल. के समान्तर मार्ग (WXYZ) का क्षे. = ल. x चौ.
= 75 मी. x 3 मी.
= 225 मी.^{2}

चौ. के समान्तर मार्ग PQRS का क्षे. = ल. x चौ.
= 55 मी. x 3 मी.
= 165 मी.^{2}

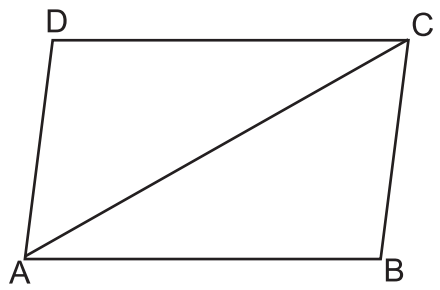
उभयनिष्ठ मार्ग वर्ग MNOT का क्षे. = भुजा x भुजा
= 3 मी. x 3 मी.
= 9 वर्ग मी.

वर्ग MNOT का क्षेत्रफल 9 वर्ग मी दोनों भागों में सम्मिलित है। अतः इसको एक बार घटाया जाता है।

∴ सम्पूर्ण मार्ग का से. = wxyz का क्षे. + PQRS का क्षे. – वर्ग MNOT का क्षे.
= (225 + 165 – 9) वर्ग मी.
= (390 - 9) वर्ग मी.
= 381 वर्ग मी.

20.7 त्रिभुज का क्षेत्रफल

किसी समान्तर चतुर्भुज का विकर्ण इसे दो समान त्रिभुजों में बाँटता है।



∵ समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

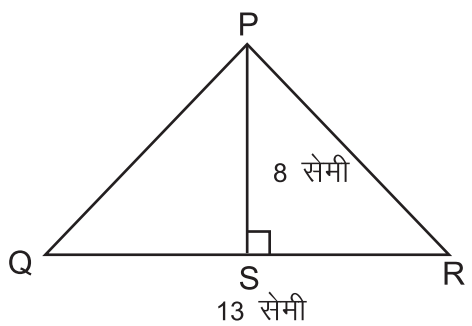
∵ त्रिभुज का क्षेत्रफल = ½ × (समान्तर चतुर्भुज का क्षे.)

= ½ × (आधार × ऊँचाई)

उदाहरण 6 यदि त्रिभुज PQR की ऊँचाई PS = 8 सेमी तथा आधार QR = 13 सेमी हो तो उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

त्रिभुज की ऊँचाई PS = 8 सेमी

त्रिभुज का आधार QR = 13 सेमी



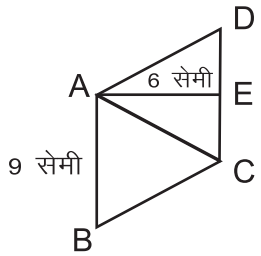
∴ ΔPQR का से. = ½ × आधार × ऊँचाई

= ½ × 13 × 8 सेमी^{2}

= 52 सेमी^{2}

प्रश्नावली 20.3

1. निम्न आकृति को देखकर त्रिभुज ACD तथा समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

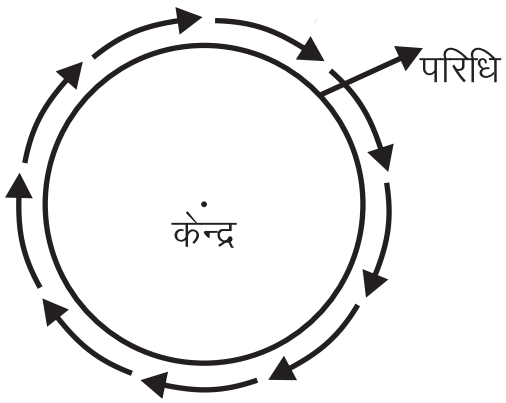


2. एक त्रिभुज का आधार 8 सेमी है। यदि त्रिभुज की ऊँचाई आधार से दुगुनी है, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

3. 80 मी. भुजा वाले वर्गाकार पार्क की परिसीमा के साथ लगा हुआ भीतर की ओर 5 मी. चौड़ा मार्ग बना हुआ है। इस मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

20.7 वृत्त की परिधि आपने चरखे में बेलों को वृत्ताकार घूमते देखा है, बैलों द्वारा चरखें के चारों तरफ एक चक्कर पूरा करने में जो दूरी तय की जाती है। वह परिधि कहलाती है।

किसी वृत्ताकार आकृति को समतल पर बनाकर उसके किनारे पर एक बिन्दु लगाकर उस बिन्दु को किनारे–किनारे पूरा एक चक्कर काटने की दूरी परिधि कहलाती है।



20.7.1 वृत्त की परिधि तथा व्यास में संबंध

अलग–अलग त्रिज्या वाली वृत्ताकार आकृतियों में परिधि ÷ व्यास का मान लगभग समान रहता है। यह मान $\frac{22}{7}$ या लगभग 3.14 रहता है। इस स्थिरांक को ''π'' से प्रदर्शित करते है।

अर्थात् $\frac{\text{परिधि (C)}}{\text{व्यास (d)}} = \pi$

या परिधि (c) = π d

या $c = 2\pi r \quad (\because \; d = 2r)$

उदाहरण 7 एक वृत्ताकार पहिए का व्यास 11.2 सेमी है तो पहिए की परिधि ज्ञात कीजिए।

पहिए का व्यास (d) = 11.2 सेमी

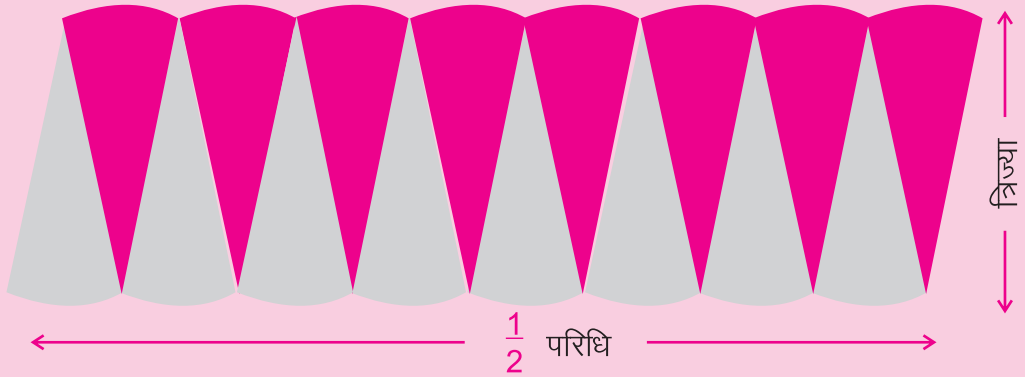
अतः त्रिज्या (r) $= \frac{11.2}{2} = 5.6$ सेमी

वृत्ताकार पहिए की परिधि $= 2\pi r$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 5.6$ सेमी

= 35.2 सेमी

गतिविधि – एक वृत्त के अर्द्धभाग को छायांकित कीजिए तथा इसे लगातार 6 बार उतरोत्तर मोड़िए तथा सलवटों के अनुदिश काटकर 64 खण्ड प्राप्त करें, इन खण्डों को चित्रानुसार व्यवस्थित कीजिए।



क्या आप इससे वृत्त के क्षेत्रफल का सूत्र बता सकते है ? आप देखेंगे कि यह आयत के समान आकृति बन रही है इसकी लम्बाई परिधि की आधी तथा चौड़ाई त्रिज्या के बराबर है,

यदि वृत्त की त्रिज्या 'r' है तो – आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौड़ाई

$$= \pi r \times r = \pi r^2$$

अतः अभीष्ट वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

उदाहरण 8 25 सेमी त्रिज्या की वृत्ताकार डिस्क का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । $\pi = 3.14$ लीजिए।

डिस्क की त्रिज्या (r) = 25 सेमी

वृत्ताकार डिस्क का क्षेत्रफल = πr^2

$= 3.14 \times (25)^2$

$= 3.14 \times 25 \times 25$

= 1962.50 वर्ग सेमी

उदाहरण 9 एक वृत्ताकार तश्तरी का क्षेत्रफल 2826 सेमी^{2} है तो वृत्ताकार तश्तरी की त्रिज्या ज्ञात कीजिए । (π = 3.14)

वृत्ताकार तश्तरी का क्षे. = 2826 सेमी^{2}

πr^2 = 2826 वर्ग सेमी

$3.14 \times r^2$ = 2826 वर्ग सेमी

$r^2 = \frac{2826}{3.14}$ वर्ग सेमी

r^2 = 900 वर्ग सेमी

r = 30 सेमी

प्रश्नावली 20.4

1. दी गई त्रिज्याओं वाले वृत्तों की परिधि ज्ञात कीजिए।

   (a) r = 14 सेमी (b) r = 10.5 सेमी

2. निम्न वृत्तों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

   (a) r = 21 मीटर (b) d = 14 सेमी

3. एक वृत्त की परिधि 44 सेमी है। वृत्त की त्रिज्या और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$)

4. रेखा अपनी बकरी को 6.3 मीटर लम्बी रस्सी से एक खूँटे द्वारा बांध देती है तो बकरी कितने क्षेत्रफल की घास खा पाती है ?

अध्याय 21

आँकड़ों का प्रबन्धन

पिछली कक्षा में हमने पढ़ा कि निश्चित उद्देश्य से जो संख्यात्मक तथ्य एकत्रित किये जाते है वे आँकड़े कहलाते हैं।

पिछली कक्षा में हमने विभिन्न प्रकार के आँकड़ो के साथ कार्य किया था। हमने आँकड़ों को एकत्रित करना, उनको सारणीबद्ध करना तथा उन्हें चित्रालेख, दंड आलेखों के रूप में प्रदर्शित करना सीखा था। इस अध्याय में हम इनमें बारे में कुछ और अधिक जानने का प्रयास करेंगे। साथ ही इस अध्याय में हम केन्द्रीय प्रवृत्तियाँ, अवर्गीकृत आँकड़ो का समान्तर माध्य, माध्यिका और बहुलक आदि का अध्ययन करेंगे।

चित्रालेख एवं दण्ड आलेख – एक चित्रालेख आँकड़ो को चित्रों, वस्तुओं या वस्तुओं के भागों के रूप में निरूपित करता है। आँकड़ो को चित्रालेख द्वारा निरूपित करने में समय अधिक लगता है और इसे बनाने में थोड़ी कठिनाई भी होती है अतः आँकड़ो को निरूपित करने की एक अन्य विधि दंड आलेख भी है। दंड आलेख समान चौड़ाई के दंड है। किन्हीं दो दण्डों के मध्य दूरी समान होती है। इस प्रकार खींचे गये प्रत्येक दण्ड की लम्बाई दी गयी संख्या को दर्शाती है। ये दण्ड उर्ध्वाधर या क्षैतिज खींचे जा सकते हैं।

उदाहरण 1 – जयपुर से बीकानेर चलने वाली एक बस में एक सप्ताह में यात्रा करने वाले यात्रियों की संख्या नीचे तालिका में दी गई है।

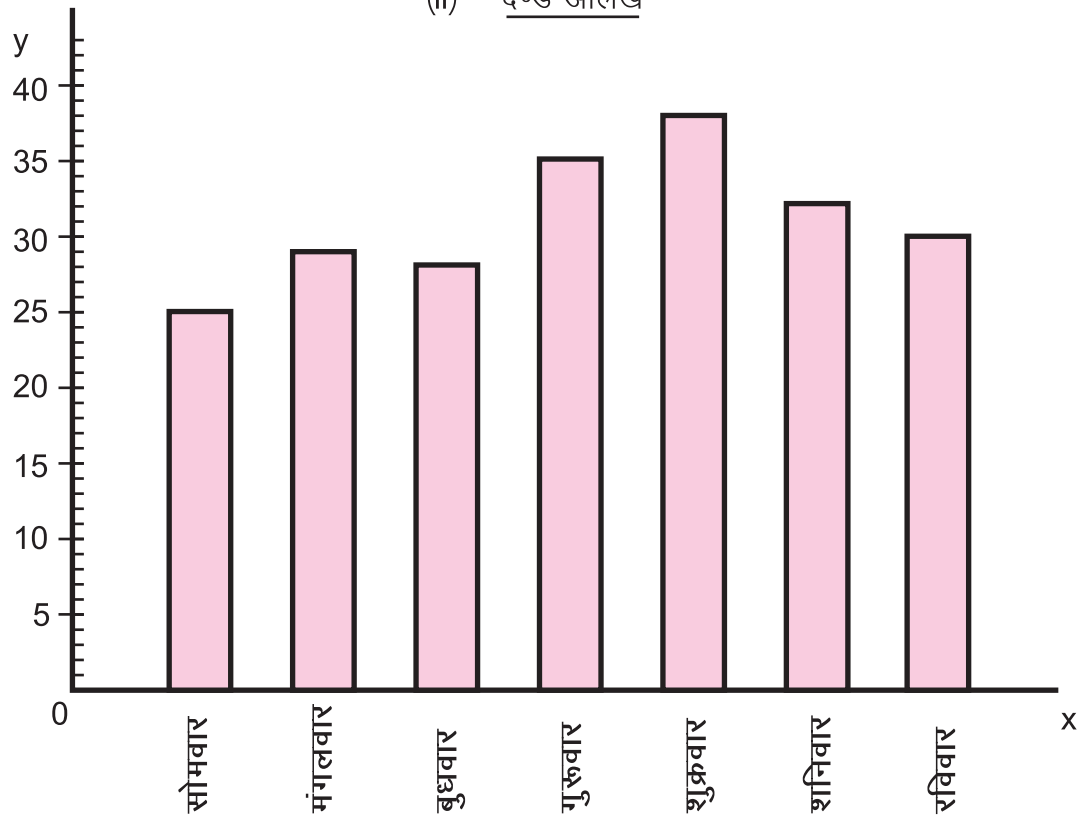
(i) 5 यात्री = ✻ संकेत लेकर चित्रालेख बनाइए।

(ii) 5 यात्री = 1 सेमी पैमाना लेकर दण्ड आलेख बनाइए।

सोमवार	मंगलवार	बुधवार	गुरूवार	शुक्रवार	शनिवार	रविवार
25	29	28	35	38	32	30

दिन	यात्रियों की संख्या संकेत 5 यात्री = ✿
सोमवार	✿ ✿ ✿ ✿ ✿
मंगलवार	✿ ✿ ✿ ✿ ✿ ✿
बुधवार	✿ ✿ ✿ ✿ ✿ ✿
गुरूवार	✿ ✿ ✿ ✿ ✿ ✿ ✿
शुक्रवार	✿ ✿ ✿ ✿ ✿ ✿ ✿ ✿
शनिवार	✿ ✿ ✿ ✿ ✿ ✿ ✿
रविवार	✿ ✿ ✿ ✿ ✿ ✿

(ii) दण्ड आलेख



उपर्युक्त चित्रालेख एवं दण्ड आलेख के आधार पर क्या आप बता सकते हैं ?

(a) सबसे अधिक यात्रियों ने किस दिन यात्रा की ?

(b) बुधवार को कितने यात्रियों ने यात्रा की ?

(c) अधिकतम और न्यूनतम यात्रियों की संख्या में कितना अन्तर है ?

(d) सबसे कम यात्रियों ने किस दिन यात्रा की ?

हम देख सकते हैं कि इन सभी प्रश्नों का उत्तर चित्रालेख एवं दण्ड आलेख दोनों के अवलोकन मात्र से दिया जा सकता है।

केन्द्रीय प्रवृति के माप – आप औसत शब्द से अवश्य ही परिचित होंगे तथा अपने दैनिक जीवन में औसत शब्द से सम्बन्धित निम्नलिखित प्रकार के कथन अवश्य ही सुने या पढ़े होंगे :

1. कक्षा 7 के लड़कों की औसत लम्बाई 5 फीट है।

2. भारत में प्रति व्यक्ति औसत आय 25 हजार रूपये वार्षिक है।

3. मोहित प्रतिदिन औसत 7 घण्टे पढ़ता है।

4. कक्षा 7 की मासिक औसत उपस्थिति 96 प्रतिशत है।

उपर्युक्त कथनों पर विचार करें।

क्या आप कह सकते हैं कि पहले कथन के अनुसार कक्षा के प्रत्येक लड़के को लम्बाई ठीक 5 फीट ही है या द्वितीय कथन के अनुसार भारत का प्रत्येक व्यक्ति पूरे वर्ष में 25 हजार रूपये ही कमाता है।

स्पष्टतः इन प्रश्नों का उत्तर है ''नहीं'' ।

तब इन कथनों से क्या आशय है ?

''औसत से हम समझते हैं कि कक्षा 7 के अधिकतर लड़कों की लम्बाई 5 फीट के लगभग है। कुछ लड़कों की 5 फीट से कम हो सकती है जबकि कुछ लड़कों की लम्बाई 5 फीट से अधिक भी हो सकती है।

इसी प्रकार कथन 3 के अनुसार मोहित प्रतिदिन लगभग 7 घण्टे पढ़ाई करता है। किसी दिन 7 घण्टे से कुछ कम हो सकता है तो किसी दिन 7 घण्टे से ज्यादा पढ़ाई भी करता है।

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि ''औसत'' एक ऐसी संख्या है जो प्रेक्षणों या आँकड़ों के एक समूह की केन्द्रीय प्रवृति को निरूपित करती या दर्शाती है क्योंकि औसत सबसे अधिक और सबसे कम आँकड़ों के एक समूह की केन्द्रीय प्रवृति का मापक है। विभिन्न प्रकार के आँकड़ों की व्याख्या करने वाले विभिन्न प्रकार के प्रतिनिधि या केन्द्रीय मानों की आवश्यकता होती है।

इनमें से एक प्रतिनिधि मान अंकगणितीय या समान्तर माध्य है।

समान्तर माध्य – आँकड़ों के एक समूह के लिए अधिकांशतः प्रयोग किये जाने वाला प्रतिनिधि मान समान्तर माध्य या अंकगणितीय माध्य है संक्षेप में इसे माध्य (mean) भी कहते हैं। इसे अच्छी प्रकार से समझने के लिए, आइये निम्नलिखित उदाहरण को देखें।

उदाहरण 2 – प्रथम 6 सम संख्याओं का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल – हम जानते हैं कि प्रथम छः सम संख्याएँ है 2,4,6,8,10,12, समान्तर माध्य ज्ञात करने के लिए हम सभी प्रेक्षणों का योग ज्ञात करके उसमें प्रेक्षणों की कुल संख्या से भाग देते हैं। अतः इस स्थिति में

$$\text{समान्तर माध्य} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$$

$$= \frac{2+4+6+8+10+12}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

इस प्रकार प्रथम छः सम संख्याओं का समान्तर माध्य 7 होगा।

बहुलक – प्रतिनिधित्व मान का दूसरा प्रकार बहुलक है, आइए उदाहरण देखें।

उदाहरण 3 – एक रेडीमेड कपड़े की दुकान पर विभिन्न नाप की बनियान उपलब्ध है, दुकानदार ने बनियान की साप्ताहिक मांग ज्ञात करने के लिए निम्न तालिका अनुसार बनियानों की बिक्री को रिकार्ड किया।

माप (Cm में)	80	85	90	95	100
बेची गई कमीजों की संख्या	7	9	37	24	13

अगर दुकानदार द्वारा बेची गई बनियानों का माध्य ज्ञात करें तो

$$\text{माध्य} = \frac{\text{बेची गई बनियानों की कुल संख्या}}{\text{बनियानों के नम्बर के कुल प्रकार}} = \frac{90}{5} = 18$$

तो क्या दुकानदार को प्रत्येक साईज की 18–18 बनियानें प्रति सप्ताह मंगवानी होंगी। निश्चित ही उपर्युक्त रिकार्ड के आधार पर दुकानदार अन्य माप के मुकाबले 90 व 95 सेमी माप की बनियानें अधिक मंगवाएगा क्योंकि 90 व 95 सेमी. माप की बनियानों की बिक्री अधिकतम हुई है।

इसमें भी 90 सेमी. माप को बनियानों की बिक्री सर्वाधिक हुई है। यह आँकड़ो का एक अन्य प्रतिनिधि मान है। यह प्रतिनिधि मान आँकड़ो का बहुलक कहलाता है।

दिये गये आँकड़ो में सबसे अधिक बार आने वाले पद को बहुलक कहते हैं।
अर्थात जिस पद की बारम्बारता सबसे अधिक होती है वह पद बहुलक कहलाता है।

बड़े व अवर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक

यदि आँकड़ो की संख्या अधिक हो तो उसको आरोही या अवरोही क्रम में लिखकर गिनना इतना आसान नहीं होता है।

ऐसी स्थिति में हम आँकड़ो को मिलान चिह्न की सहायता से सारणीबद्ध करते हैं।

उदाहरण 4 – एक कक्षा के 30 विद्यार्थियों की ऊँचाई (सेमी में) निम्न प्रकार से है –

149, 149, 150, 151, 150, 151, 152, 151, 153, 152

153, 152, 152, 150, 149, 152, 153, 152, 150, 151

150, 153, 151, 152, 149, 153, 152, 152, 150, 153

इन आँकड़ो का बहुलक ज्ञात कीजिए।

आँकड़ो को सारणीबद्ध करने पर –

ऊँचाई (सेमी में)	मिलान चिन्ह	विद्यार्थियों को संख्या
149	IIII	4
150	~~IIII~~ I	6
151	~~IIII~~	5
152	~~IIII~~ IIII	9
153	~~IIII~~ I	6

इस सारणी को देखकर हम तुरंत कह सकते हैं कि इन आँकड़ो का बहुलक 152 है, क्योंकि सबसे अधिक 9 विद्यार्थियों की ऊँचाई 152 सेमी. है।

हमने देखा कि जहाँ माध्य हमें आँकड़ो के सभी प्रेक्षणों का औसत प्रदान करता है वहीं बहुलक आँकड़ो में सबसे अधिक बार आने वाले प्रेक्षणों को दर्शाता है।

माध्यिका – अब एक अन्य उदाहरण पर विचार करते है–

एक क्रिकेट मैच में खिलाड़ियों द्वारा बनाये गये रन इस प्रकार हैं–

105, 47, 0, 36, 50, 16, 7, 70, 65, 36, 52

यदि हम रनों के आधार पर खिलाड़ियों को दो समूहों में बाँटना चाहते हैं तो इस स्थिति में समान्तर माध्य या बहुलक क्या उचित प्रतिनिधि मान होगा ? इन आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर –

0, 7, 16, 36, 36, 47, 50, 52, 65, 70, 105

हम देखते हैं कि उपर्युक्त आँकड़ों में 47 ऐसी संख्या है जिसके दोनों और 5–5 संख्याओं के समूह हैं। अर्थात् 5 खिलाड़ियों में 47 से कम रन बनाए एवं 5 खिलाड़ियों में 47 से अधिक रन बनाए। इस प्रकार संख्याओं को आरोही या अवरोही क्रम व्यवस्थित करने पर ठीक मध्य में आने वाली संख्या को हम 'माध्यिका' या 'माध्यक' कहते है।

उदाहरण 4 – निम्नांकित आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात कीजिए –

0, 47, 35, 20, 30, 40, 50

आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर हमें प्राप्त होता है।

0, 20, 30, 35, 40, 47, 50

उपर्युक्त आँकड़ों में कुल 7 पद हैं जिनका मध्य पद ज्ञात करने के लिए उसमें 1 जोड़कर 2 का भाग दिया जाता है। (जब पदों की संख्या विषम हो) अर्थात उपर्युक्त आँकड़ों की माध्यिका चौथा पद है जो 35 है।

माध्यिका पद $= \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$ (चौथापद)

इसी प्रकार यदि पदों की संख्या सम हो तो आरोही क्रम में जमाने के पश्चात मध्य के दो पदों का माध्य ही 'माध्यिका होती है।

प्रश्नावली 21

1. प्रथम 10 पूर्ण संख्याओं का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।
2. एक क्रिकेट खिलाड़ी ने 6 पारियों में निम्नलिखित रन बनाए–
   68, 03, 17, 78, 12, 104 इन रनों का स. माध्य ज्ञात कीजिए।
3. यदि 3, 4, 8, 5, x, 3 अंकों का समान्तर माध्य 4 हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।
4. वंदना ने एक पासा लिया। उसने पासे को 20 बार उछाला और प्रत्येक बार प्राप्त संख्या को निम्न प्रकार लिखा–
   3, 4, 6, 3, 5, 2, 2, 3, 5, 4,
   5, 6, 6, 1, 5, 6, 3, 5, 2, 4

   उपर्युक्त आँकड़ों की सहायता से माध्य, माध्यिका एवं बहुलक ज्ञात कीजिए।

5. गणित को एक परीक्षा में 15 विद्यार्थियों ने 25 में से निम्नानुसार अंक प्राप्त किये–
19, 25, 23, 20, 9, 20, 15, 10, 16, 25, 20, 24, 12, 20, 12

उपर्युक्त आँकड़ों का स. माध्य, बहुलक एवं माध्यिका ज्ञात कीजिए। क्या यह समान है?

6. निम्नांकित वाक्य सत्य है या असत्य –

(1) संख्याओं के एक समूह में दो बहुलक हो सकते हैं।

(2) बहुलक प्रेक्षण मात्र से ज्ञात किया जा सकता है।

(3) पदों की संख्या विषम हो तो माध्यिका पद ज्ञात करने के लिए कुल पदों में 1 जोड़कर 2 का भाग दिया जाता है।

(4) 6, 4, 3, 8, 9, 12, 13, 9 का माध्य 9 है।

7. एक कॉलोनी में विभिन्न व्यवसायों से जुड़े लोगों की संख्या निम्न तालिका में दी गई है।

व्यवसाय	अध्यापक	डॉक्टर	दुकानदार	मजदूर	वकील
व्यक्तियों की संख्या	8	5	6	7	2

उपर्युक्त तालिका के आधार पर उचित संकेत/पैमाना लेकर।

(i) चित्रालेख (ii) दण्ड आलेख का निर्माण कीजिए।